

Etude de solitons en théorie classique des champs de basse dimension

Yera Niangoura

▶ **To cite this version:**

Yera Niangoura. Etude de solitons en théorie classique des champs de basse dimension. Mathématiques [math]. Université de Tours, 1998. Français. NNT : . tel-01270457

HAL Id: tel-01270457

https://univ-tours.hal.science/tel-01270457

Submitted on 7 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ETUDE DE SOLITONS EN THEORIE CLASSIQUE DES CHAMPS DE BASSE DIMENSION

YERA Niangoura Jean-Claude

Laboratoire d'Analyse Mathématique et Applications

Université de TOURS

Parc de Grandmont

F-37200 TOURS

Soutenue le 28 mai 1998 devant le Jury composé de:

M-F. Bidaut-Véron, P. Forgács, P. Horvathy (Directeur de thèse), N. Manton (Président).

Rapporteurs: C. Duval et L. Palla.

Mention très honorable.

Abstract. This Thesis, defended in 1998, reviews various properties of soliton solutions in low dimensions. Particular attention is devoted to vortices in the Abelian Chern-Simons theories. Integrability of the Jackiw-Pi model is confirmed using the Painlevé test and solutions are constructed using Bäcklund transformations. Generalisation to the non-relativistic Manton model is considered. Relation to the Quantum Hall effect is considered.

Avant-propos.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Peter Horváthy, mon directeur de thèse, qui a dirigé mon travail avec beaucoup de patience et de disponibilité. Sa grande expérience et son aide constante ont été précieuses dans l'élaboration de cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Nicholas Manton, Professeur à l'Université de Cambridge, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je suis très touché de l'attention que Monsieur Laszlo Palla, professeur à l'Université de Budapest, et Monsieur Christian Duval, professeur à l'Université de Marseille, ont porté à ce travail en acceptant d'en être les rapporteurs et d'y consacrer de leur temps. Je leur exprime ma sincère gratitude.

Je voudrais remercier aussi Madame Marie-Françoise Bidaut-Véron et Monsieur Peter Forgács, professeurs à l'Université de Tours, qui ont porté de l'intérêt à mon travail en acceptant de participer au jury.

Je suis très reconnaissant :

- à Monsieur Laurent Véron, Directeur du Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique de Tours, et à tout le personnel du Département de Mathématiques pour leur hospitalité.

Un clin d'œil aux doctorants pour la bonne ambiance qu'ils ont su créer au sein du laboratoire mais aussi à l'extérieur.

Je remercie en particulier Monsieur Mokhtar Hassaïne avec qui j'ai beaucoup travaillé.

- au Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche de la République de Côte-d'Ivoire pour son soutien financier.

- à Monsieur Yed Esaï Angoran, Conseiller du Président de la République de Côte-d'Ivoire et ancien du M-I-T, qui m'a encouragé dans la voie de la recherche.

Je dédie cette thèse à mes parents.

TABLE DES MATIERES.

0. **Introduction.** 7

I. **Preliminaires.** 22

1. **Vortex et supraconductivité; le modèle de Landau-Ginzburg**. 23
2. **Modèle Abélien de Higgs**. 25
   - 2.1. *Le modèle.* 25
   - 2.2. *Solutions radiales.* 26
   - 2.3. *Vortex et auto-dualité.* 27
3. **L'effet de Hall quantique**. 29
4. **Symétries**. 30
   - 4.1. *Symétries et théorème de Nœther.* 31
   - 4.2. *Groupes de Galilée et de Schrödinger.* 33
   - 4.3. *Symétries et quantités conservées en théorie de champ non-relativiste.* 38
   - 4.4. *Une méthode pour déterminer le groupe de symétrie d'une e.d.p.* 40
5. **Intégrabilité des équations aux dérivées partielles**. 46
   - 5.1. *Méthode de diffusion inverse et conjecture de Painlevé.* 46
   - 5.2. *Une autre conjecture de Painlevé.* 49
   - 5.3. *Application: l'équation de Schrödinger non linéaire modifiée*.* 53
6. **Electromagnétisme non relativiste**. 56

II. **Vortex non topologiques; le modèle de Jackiw-Pi**. 60

7. **Le modèle de Jackiw et Pi**. 62
8. **Symétries et constantes du mouvement**. 63
9. **Théorème de Jackiw et Pi; solutions auto-duales**. 65
10. **Test de Painlevé et transformation de Bäcklund***. 71
11. **Solutions vortex de l'équation de Liouville***. 79

III. **Vortex topologiques; le modèle de Manton**. 89

12. **Le modèle de Manton**. 91
13. **Solutions statiques auto-duales***. 94
14. **Vortex dans un champ électromagnétique extérieur***. 96

15. **Symétries***. 98
16. **Modèle relativiste et limite non relativiste***. 103
16.1. *Energie et solutions statiques "self-duales"**. 105
16.2. *Limite non relativiste**. 108
17. **Vortex spinoriels***. 110
18. **Comparaison avec d'autres modèles***. 113

Bibliographie. 116

N. B. Les parties marquées par un astérisque, *, contiennent des résultats nouveaux.

0. INTRODUCTION.

Cette thèse a pour objet l'étude des solutions du type "soliton" en théorie des champs classiques en basses dimensions. Une attention particulière est consacrée aux vortex en théories abéliennes de Chern–Simons. Ces théories décrivent, en dimension 2+1, des particules chargées qui interagissent par l'intermédiaire d'un champ électromagnétique $(\vec{E}, B)$. La dynamique de ce dernier est donnée par l'action $S = \int \mathcal{L} dt$, où le lagrangien est

$$\mathcal{L}_{CS} = \int \tfrac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha F_{\beta\gamma} \, d^2\vec{x} \tag{0.1}$$

plutôt que le lagrangien habituel de Maxwell

$$\mathcal{L}_M = \int \tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \, d^2\vec{x}. \tag{0.2}$$

Ici, $F_{\beta\gamma} \equiv \partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta$ est le tenseur électromagnétique qui dérive du potentiel A_μ, $\mu = 0, 1, 2$.

Le lagrangien (0.1) est d'abord apparu en mathématique dans l'étude des classes de Chern pour une variété complexe [CH]. C'est un invariant topologique qui correspond à la caratéristique d'Euler calculée à partir de la classe caractéristique secondaire de Chern.

En physique classique des champs, il a été introduit par Jackiw et Templeton [JTE], Schonfeld [SC] et Hagen [HA1] pour décrire des théories de jauges massives. Jusqu'alors, en théorie abélienne *Maxwell + champ de matière*, l'unique manière d'obtenir des photons massiques, tout en gardant la liberté de jauge, était le mécanisme de Higgs. Le champ de jauge devenait massique après une brisure spontanée de la symétrie.

Dans leur modèle, Deser, Jackiw et Templeton [DJT] considèrent le lagrangien

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M - m\mathcal{L}_{CS} \tag{0.3}$$

dont les équations d'Euler–Lagrange sont

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{m}{2} \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0. \tag{0.4}$$

Cette théorie peut être considérée comme une théorie de jauge: même si le lagrangien n'est pas invariant lors de la transformation

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \omega, \tag{0.5}$$

les équations du mouvement le sont. D'autre part, les excitations du champ électromagnétique sont massives, de masse m.

PREMIERE PARTIE: **Préliminaires**.

Dans la première partie de cette thèse, nous avons réuni des faits connus, nécessaires à la compréhension des résultats présentés dans les parties suivantes.

A. Vortex, modèle de Higgs et théories Chern–Simons.

Nous commençons par présenter ces objets curieux appelés "vortex" et qui ressemblent aux tourbillons en mécanique des fluides; ici, ils apparaissent comme des solutions exactes à énergie finie de certaines théories classiques de champs et possèdent des propriétés similaires aux particules en physique des hautes énergies. Notons que ces objets n'interessent pas uniquement le théoricien: ils ont été observés en physique de la matière condensée, notamment en supraconductivité.

Dans les deux chapitres suivants, nous expliquons l'intérêt des théories Chern–Simons. Ces théories sont, pour l'essentiel, des versions de la théorie phénoménologique de la supraconductivité, due à Landau et Ginzburg [LP], [DG].

Nous analysons d'abord la généralisation relativiste appelée le modèle abélien de Higgs. Cet exemple bien connu décrit des interactions entre particules, interactions transmises par des forces électromagnétiques gouvernées par l'électrodynamique de Maxwell. Les équations du mouvement de ce modèle sont données par [NO]

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \phi &= \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - 1)\phi, \\ \partial^\mu F_{\nu\mu} &= j_\nu \equiv \frac{i}{2}((D_\nu\phi)\phi^* - (D_\nu\phi)^*\phi), \end{aligned} \tag{0.6}$$

où le champ scalaire complexe ϕ représente la matière, $F_{\nu\mu} = \partial_\nu a_\mu - \partial_\mu a_\nu$ est le tenseur électromagnétique et $D_\mu = \partial_\mu - i a_\mu$ est la dérivée covariante.

Ce sont des équations non linéaires, couplées et aux dérivées partielles, très difficiles à résoudre. Une manière astucieuse a été trouvé par Bogomol'nyi [BOG], qui a construit des solutions statiques purement magnétiques, c'est-à-dire a_0 et $\vec{E}$ nuls, dites "self-duales". Sa méthode se résume ainsi. Dans cette théorie relativiste, l'énergie d'une configuration statique est

$$E = \int \Big\{\frac{1}{2}F_{12}^2 + \frac{1}{2}F_{0k}^2 + \frac{1}{2}|D_k\phi|^2 + |a_0\phi|^2 + \frac{\lambda}{8}(|\phi|^2 - 1)\Big\}^2 dxdy. \tag{0.7}$$

Cette énergie doit être minimum pour une solution statique de (0.6). Remarquons que l'énergie peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} E = \int \Big\{&\frac{1}{2}|(D_1 \pm D_2)\phi|^2 + \frac{1}{2}(F_{12} \mp \frac{1}{2}(1 - |\phi|^2))^2 + \frac{1}{8}(\lambda - 1)(1 - |\phi|^2)^2 \\ &+ \frac{1}{2}F_{0k}^2 + |a_0\phi|^2\Big\}dxdy \pm 2\pi N, \qquad N = \int B d^2x. \end{aligned} \tag{0.8}$$

Ici, à cause du comportement à grandes distances du champ ϕ, le flux magnétique, $N = \int B d^2x$, est un invariant topologique. N est en effet un entier qu'on identifie au nombre de vortex. Pour des configurations statiques et purement magnétiques, $a_0 = 0$, $\vec{E} = 0$ et pour la valeur particulière $\lambda = 1$ de la constante de couplage, l'énergie atteint son minimum si

$$\begin{aligned} (D_1 + iD_2)\phi &= 0, \\ F_{12} &= \frac{1}{2}(1 - |\phi|^2). \end{aligned} \tag{0.9}$$

Pour les champs qui satisfont à ces relations (0.9), les équations (0.6) du second ordre se réduisent donc aux équations du premier ordre, ce qui simplifie considérablement leurs résolutions. En éliminant le potentiel électromagnétique, on trouve, en fin de compte, l'équation

$$\triangle \ln \varrho = \tfrac{1}{2}(\varrho - 1), \qquad \varrho = |\phi|^2, \tag{0.10}$$

qui ressemble à l'équation classique de Liouville. Contrairement à cette dernière, (0.10) n'est pas intégrable et aucune solution explicite n'a été trouvée. Pour un flux magnétique égal à $2\pi N$, Weinberg [WE] a montré que la solution de (0.10) dépend de $2N$ paramètres. Jaffe et Taubes ont montré que, dans le cas $\lambda = 1$, toutes les solutions statiques et purement magnétiques du modèle (0.6) sont "self-duales" [JT].

Le terme "self-dual" vient de l'analogie avec les équations "self-duales" de Yang-Mills

$$F_{\mu\nu} = \pm \widetilde{F}_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \tag{0.11}$$

où $\widetilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ est le champ dual, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ est la courbure du champ de jauge A, à valeurs dans une algèbre de Lie.

Les solutions de (0.11) sont solutions des équations du mouvement, du second ordre,

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \qquad D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \cdot\,], \tag{0.12}$$

de la théorie non abélienne de Yang et Mills, qui généralise l'électromagnétisme de Maxwell.

Les équations (0.11) peuvent avoir une autre forme. Exprimées dans les coordonnées $u = (x^1 + ix^2)/\sqrt{2}$ et $v = (x^3 + ix^4)/\sqrt{2}$, elles deviennent

$$\begin{aligned} F_{uv} &= 0, \\ F_{\bar{u}\bar{v}} &= 0, \\ F_{u\bar{u}} + F_{v\bar{v}} &= 0. \end{aligned} \tag{0.13}$$

Ces équations expriment la condition de compatibilité du système linéaire

$$(D_u - \xi D_{\bar{v}})\psi = 0, \qquad (D_v + \xi D_{\bar{u}})\psi = 0, \tag{0.14}$$

où ξ est un paramètre complexe appelé le paramètre spectrales [FAD]. Il est intéressant de noter que les équations de Bogomol'nyi (0.9) peuvent aussi être obtenues des équations "self-duales" de Yang-Mills (0.11) par réduction dimensionnelle. C'est pour cela, et pour sa ressemblance avec les équations (0.14) que l'équation de Bogomol'nyi (0.9) est dite aussi "self-duale".

Depuis les solutions de Bogomol'nyi (0.9), aucune solution non purement magnétique n'a été trouvée. En fait, Julia et Zee ont montré [JZ] que le modèle abélien de Higgs n'admet aucune solution vortex chargée électriquement et à énergie finie. Par contre, on peut obtenir une telle solution en ajoutant au lagrangien un terme de Chern–Simons [PK]. Avec ce nouveau modèle, Paul et Khare n'ont pu obtenir ni solutions explicites, ni solutions "self-duales". Pour y arriver, on peut négliger le terme de Maxwell et obtenir ainsi une théorie Chern–Simons pure [HA2], [JP1], [JP2]. On peut aussi construire une théorie non relativiste Maxwell– Chern–Simons. Pour ces deux dernières théories, l'énergie d'une configuration est

$$E = \int \{|\vec{D}\phi|^2 + U(\phi)\}\, dxdy,$$

où $U(\phi)$ est un potentiel d'interaction. (cf. les modèles de Jackiw–Pi et de Manton respectivement aux chapitres II et III). On remarquera l'absence des termes électriques $|a_0\phi|^2$ et $||\vec{E}||^2$ présents dans (0.7). Comme on le verra, c'est cette absence qui ouvre la porte à l'existence de solutions vortex chargées électriquement.

Il existe aussi un intérêt physique pour les modèles de Chern–Simons. En 1980, en étudiant le comportement des électrons condamnés à se mouvoir entre deux semi-conducteurs cristallins, von Klitzing et son équipe ont mis à jour l'effet Hall quantique. Quand le tapis d'électrons est soumis à de très faibles températures et à un champ magnétique extérieur très fort, la loi phénoménologique liant le courant et le champ électrique est une loi de Hall

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \vec{E}, \tag{0.15}$$

où la conductance κ ne prend que des valeurs entières d'un quantum de conductance. Si on suppose la conservation de la charge ϱ responsable du courant $\vec{J}$, on établit, à l'aide de la loi précédente, l'identité

$$\kappa B = -\varrho, \tag{0.16}$$

où B est un champ magnétique porté par la charge.

Remarquablement, (0.15–0.16) correspondent aux équations d'Euler–Lagrange du modèle

$$\kappa\mathcal{L}_{CS} + \int A^\mu j_\mu, \tag{0.17}$$

avec $j_\mu = (-\varrho, \vec{J})$.

Les équations (0.15–0.16) constituent les lois de l'électrodynamique de Chern–Simons. D'une manière générale, l'electrodynamique de Chern–Simons correspond à celle de l'effet Hall quantique. Les égalités (0.15–0.16) sont parfois appelées équations "champs-courant" [JP1], [JP2]; parce qu'elles remplacent respectivement les équations d'Ampère et de Gauss de la théorie de Maxwell, (0.15) et (0.16) seront parfois appelées équations d'Ampère et de Gauss.

B. Symétries.

Nous nous intéressons ensuite à un sujet plus mathématique: la notion de symétrie en physique théorique. Les symétries ont un rôle important dans la résolution d'un problème. En général, les solutions les plus faciles à déterminer sont les solutions statiques. On peut après, grâce aux symétries du système, construire des solutions qui dépendent du temps. Les symétries donnent aussi, par l'intermédiaire de quantités conservées, des renseignements sur l'évolution des solutions. Ces renseignements peuvent aider pour une analyse mathématique du système (théorèmes d'existence ou d'unicité de solutions). Un exemple concret est l'explosion ("blow-up") en temps fini des solutions du modèle de Jackiw–Pi lorsque ces solutions ont une énergie négative [BBS]. Un autre exemple que nous verrons est le théorème de Jackiw–Pi pour les solutions statiques de leur modèle.

Nous définissons d'abord la notion de symétrie et de constante du mouvement associée. Dans cette thèse, les théories étudiées mettent en jeu un champ scalaire chargé, ϕ, qui satisfait à l'équation de Schrödinger avec des dérivées covariantes. Nous nous sommes alors particulièrement intéressés au groupe de Schrödinger. C'est le groupe maximal des symétries "kinématiques" de l'équation de Schrödinger libre [NI]. Dans le plan, il est à huit paramètres et est engendré par les champs de vecteurs, sur l'espace–temps paramétré par $(t, \vec{x})$,

$$\begin{pmatrix} X^t \\ \vec{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\chi t^2 - \delta t - \epsilon \\ R\vec{x} - (\frac{1}{2}\delta + \chi t)\vec{x} + \vec{\beta}t + \vec{\gamma} \end{pmatrix}. \tag{0.18}$$

Il est une extension du groupe de Galilée qui contient les translations du temps et de l'espace, $\epsilon \in \mathbf{R}$ et $\vec{\gamma} \in \mathbf{R}^2$, les rotations, $\mathcal{R} \in So(2)$, et les changements de repères galiléens, $\vec{\beta} \in \mathbf{R}^2$. Les deux derniers paramètres, $\delta, \chi \in \mathbf{R}$, correspondent respectivement

à des dilatations de l'espace-temps et des expansions. Le groupe de Schrödinger va jouer un rôle important dans la seconde partie, notamment pour démontrer le théorème de Jackiw–Pi.

C. Systèmes intégrables.

Les vortex étant des solutions de type solitons, il nous a semblé utile de rappeler la notion d'intégrabilité des équations aux dérivées partielles. Un système d'équations est complètement intégrable si, en gros, il peut être résolue par une méthode liée à la méthode de diffusion inverse ([1]). Dans ce cas, il peut s'écrire comme une équation de courbure nulle

$$D_2 A_1 - D_1 A_2 + [A_1, A_2] = 0, \tag{0.19}$$

où $D_1 \equiv \partial_v + \lambda\partial_{\bar{u}}$, $A_1 \equiv A_v + \lambda A_{\bar{u}}$, $D_2 \equiv \partial_u + \lambda\partial_{\bar{v}}$, $A_2 \equiv A_u + \lambda A_{\bar{v}}$, $\lambda \in C$ étant le paramètre spectral. u et v sont des variables complexes. A_u, $A_{\bar{u}}$, A_v et $A_{\bar{v}}$ sont des éléments d'une algèbre de Lie. L'égalité (0.19) est la condition de compatibilité du système linéaire

$$\begin{aligned} D_1\psi &= A_1\psi, \\ D_2\psi &= A_2\psi. \end{aligned} \tag{0.20}$$

Par définition, (A_1, A_2) est une paire de Lax.

La méthode de diffusion inverse est née de la recherche de solitons pour l'équation de Korteweg-de-Vries. Elle a été par la suite généralisée à d'autres systèmes admettant des solutions solitoniques. Parcequ'elle étudie des solutions de type solitons, la physique des particules s'est très tôt intéressée à ces méthodes [REB].

La théorie des systèmes intégrables rentre en théorie des champs surtout par sa relation avec l'équation self-duale de Yang-Mills (0.11) [WA]. Un système est complètement intégrable s'il peut s'écrire comme réduction dimensionnelle des équations self-duales (0.11) dans une algèbre de Lie convenablement choisie. Deux remarques sont à l'origine de cette définition: d'une part (0.11) est complètement intégrable; d'autre part les équations intégrables les plus connues (Kortewegs-de-Vries, Schrödinger non–linéaire, etc.) peuvent s'écrire comme réduction de (0.11) [WA] [MS].

Nous avons présenté globalement la notion d'intégrabilité dans le but d'introduire le test de Painlevé de Weiss, Tabor et Carnevale. Ce test est une conjecture et constitue une condition suffisante d'intégrabilité. Il stipule qu'une équation aux dérivées partielles (e.d.p.) est intégrable si elle a la propriété de Painlevé. Celle-ci est une généralisation aux

([1]) Pour d'autres définitions plus ou moins équivalentes du mot "système intégrable", voir, p.e., Ref. [TA].

e.d.p. de la propriété de Painlevé pour les équations différentielles ordinaires (e.d.o.) dans le plan complexe. Bien que ce test ne soit qu'une condition suffisante, un système qui ne le vérifie pas a de fortes chances de ne pas être intégrable. En effet, très peu d'équations dont l'intégrabilité a été établie par une autre méthode ne passent pas le test de Painlevé. Un grand avantage de cette technique de Painlevé est la possibilité de construire des paires de Lax et des transformations de Bäcklund quand le système est intégrable ou se réduit à un tel système (précisons qu'une transformation de Bäcklund est une relation entre deux solutions d'un même système d'équations).

Nous terminons ce chapitre sur l'intégrabilité par un petit résultat nouveau : *l'équation de Schrödinger non linéaire:*

$$iu_t + u_{xx} + F(t,x)|u|^2 u = 0 \tag{0.21}$$

passe le test de Painlevé si et seulement si $F(t,x) = const.$

Ce travail nous a été inspiré par un article d'Alglietti, Griguolo, Jackiw, Pi et Seminara [AGJPS] sur la recherche de solitons pour l'équation non linéaire de Schrödinger modifiée,

$$i\partial_t \psi(t,x) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 \psi(t,x) + \lambda j(t,x)\psi(t,x) = 0, \tag{0.22}$$

où la non linéarité est donnée par la densité de courant

$$j(t,x) = \frac{1}{m} Im(\psi^* \partial_x \psi) \tag{0.23}$$

plutôt que l'expression habituelle $\varrho = \psi^*\psi$. En décomposant ψ comme $\psi = \sqrt{\varrho}\, e^{i\theta}$, (0.22) peut s'écrire sous la forme (0.21) avec $F(t,x)$ ne dépendant que de la phase de ψ, $F(t,x) = \partial_x \theta$.

Ici, nous nous sommes demandé pour quelle fonction $F(t,x)$ l'équation (0.21) était intégrable. Au chapitre 5.3, nous montrons que ceci demande en effet $F(t,x) = const.$ Pour le choix particulier $\theta = \omega t - kx$, (fait par Aglietti et al.) on retombe sur l'équation de Schrödinger non linéaire habituelle, avec sa solution solitonique habituelle.

D. Electromagnétisme non relativiste.

Nous terminons les préliminaires par une présentation de l'électromagnétisme non relativiste d'après Le Bellac–Lévy-Leblond. Suivant ces deux auteurs, les équations de Maxwell, qui sont relativistes, admettent deux limites non-relativistes: une limite électrique pour laquelle les effets magnétiques sont quasi–inexistants et une limite magnétique où les effets électriques sont inexistants. Parce qu'elle annule certains effets électromagnétiques, la réduction non relativiste de la théorie de Maxwell est trop restrictive. On peut, comme on le fait avec le modèle de Manton (cf. troisième partie) rétablir les effets inexistants à l'aide du terme de Chern–Simons.

SECONDE PARTIE: **Vortex non topologiques; le modèle de Jackiw–Pi**.

A. Le modèle de Jackiw–Pi.

Nous présentons le modèle abélien non–relativiste de Jackiw et Pi [JP1], [JP2] dont la densité lagrangienne est

$$\mathcal{L} = i(\psi^*(D_t\psi) - \psi(D_t\psi)^*) + \kappa(BA_0 + E_2A_1 - E_1A_2) - \sum_{k=1}^{2}(D_k\psi)(D_k\psi)^* + g|\psi|^4 \tag{0.24}$$

$A_\mu, \mu = 0, 1, 2$, est le potentiel de jauge du champ électromagnétique B et $E_k, k = 1, 2$. La dérivée covariante est définie par $D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu$. κ est une constante de couplage qui détermine la force du terme de Chern–Simons

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu}A_\alpha F_{\mu\nu} = 2\Big(BA_0 + E_2A_1 - E_1A_2\Big). \tag{0.25}$$

g est une constante de couplage qui détermine la force de la non-linéarité.

Jackiw et Pi ont montré l'existence de solutions self-duales

$$(D_1 \pm iD_2)\psi = 0, \tag{0.26}$$

pour la relation particulière,

$$g\kappa = \mp 1, \tag{0.27}$$

des coefficients g et κ. Dans ce cas, la densité de particule $\varrho \equiv |\psi|^2$ vérifie l'équation de Liouville

$$\Delta \ln \varrho = -\frac{2}{|\kappa|}\varrho. \tag{0.28}$$

Les solutions régulières et positives sont données par

$$\varrho = 4|\kappa|\frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}, \tag{0.29}$$

$f(z)$ étant une fonction analytique.

Un aspect remarquable des vortex de cette théorie est que le flux magnétique est quantifié en multiples *pairs* de 2π,

$$\Phi = \int B(\vec{r})\, dxdy = -4\pi N, \qquad N = 0, \pm 1, \ldots \tag{0.30}$$

où l'entier N s'identifie avec le nombre des vortex.

Pour la relation (0.27), Jackiw et Pi ont montré qu'il n'existe pas d'autres solutions statiques que celles données par (0.26). Ce résultat se montre aisément en remarquant que le groupe de Schrödinger est le groupe maximal de symétries "cinématiques" du modèle (0.24). En effet, par cette symétrie, on établit que l'énergie d'une configuration statique est nulle [JP1], [JP2]. Ce théorème de Jackiw–Pi constitue un nouvel intérêt des théories Chern–Simons pur: la preuve d'un résultat analogue en théorie abélienne de Higgs est moins évidente [JT].

B. Réductions intégrables [HY].

Après cette revue de la théorie de Jackiw et de Pi, nous nous adressons la question suivante: existe-t-il, pour d'autres valeurs de κ et g, des réductions intégrables du système statique issu de (0.24)? Dans notre article [HY], nous y répondons par l'analyse de Painlevé du système. On considère les équations statiques de Jackiw–Pi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\vec{\nabla} - i\vec{A})^2\psi + A_0\psi + g\varrho\psi = 0, \\ &\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{\kappa}\varrho, \\ &\vec{\nabla} \times A_0 = -\frac{1}{\kappa}\vec{J}. \end{aligned} \tag{0.31}$$

On ramène la résolution de ce système non linéaire à la résolution de plusieurs systèmes linéaires en écrivant les champs $\psi, A_\mu, \mu = 0, 1, 2$, sous la forme de séries de Laurent généralisées. Ces systèmes admettent des solutions si certaines conditions sont vérifiées, la plus importante étant la relation (0.27). Nous retrouvons alors le résultat de Jackiw–Pi et aucune autre réduction. Nous obtenons aussi, en tronquant les séries de Laurent généralisées après le terme constant, une transformation de Bäcklund. Celle-ci nous permet de retrouver les vortex (0.29) par la résolution de l'équation de Laplace

$$\Delta G = 0. \tag{0.32}$$

où G est une certaine fonction associée au problème. On en déduit en particulier la densité

$$\varrho = |\kappa|\Delta \ln \left(f(z) + \frac{1}{\overline{f(z)}} \right) \tag{0.33}$$

où $f(z)$ est une fonction analytique de la variable complexe z du plan.

C. Multivortex.

Quand

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{z - z_i}, \tag{0.34}$$

le champ magnétique associé, $B(f(z)) = -\frac{1}{\kappa}\varrho(f(z))$ avec ϱ donné par Eq. (0.29), représente N vortex séparés respectivement localisés en $z_i, i \in \{1, \cdots, N\}$. Ici, le flux est $\Phi = -4\pi N(\text{sign}\kappa)$.

Kim et al. [KSY] ont établi, par la théorie de l'index d'Atiyah-Singer, qu'une solution (0.29) correspondant à un flux $\Phi = -4\pi N(\text{sign}\kappa)$ dépend de $4N$ paramètres. Remarquons que pour $f(z)$ de la forme (0.34), la solution associée (0.29) contient bien le nombre requis de paramètres, en l'occurence les paramètres complexes c_i (l'échelle et la phase) et z_i (les positions respectives dans le plan des vortex individuels). Nous avons tenté de retrouver ce résultat sans la théorie de l'index, trop puissante lorsque la solution est donnée explicitement.

Dans notre chapitre 11, nous avons établi le théorème suivant:

Considérons les solutions de vortex avec un flux

$$\Phi = \int B(\vec{r})\, dxdy = -4\pi N(\text{sign}\kappa)$$

fixé. Si le champ magnétique B est une fonction régulière sur le plan complexe qui satisfait à la condition supplémentaire,

$$r^{2+\delta} B \quad \textit{borné} \quad \textit{quand} \quad r \to +\infty,$$

où δ est un réel strictement positif, alors la fonction f(z), qu'on suppose univoque, est rationnelle,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \tag{0.35}$$

Ici $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes, avec $\deg\ P < \deg\ Q = N$*, le coefficient du terme de degré N étant normalisé à 1.*

Cette fonction f dépend visiblement de $4N$ paramètres réels.

Pour la démonstration de ce théorème, nous utilisons un peu de géométrie et d'analyse complexe. Elle est basée sur la forme même, (0.29), de ϱ.

Pour exprimer que $B(f(z))$ représentent N vortex localisés, séparés et centrés respectivement en $z_i, i \in \{1, .., N\}$, nous prenons Q avec des racines simples, aux points z_i. En développant $f(z)$ en fractions rationnelles, on retrouve bien (0.34).

TROISIEME PARTIE: **Vortex topologiques; le modèle de Manton** [HHY1] [HH1]

A. Le modèle de Manton.

Le système de Jackiw–Pi donnait des vortex topologiques. Dans la référence [HHY1], nous étudions un autre modèle qui

(i) est non–relativisite,
(ii) a une électrodynamique couplée Maxwell–Chern–Simons,
(iii) présente des solutions vortex topologiques.

Ce modèle a été proposé par Manton [MAN] pour décrire la supraconductivité à haute température. Il est donné par la densité lagrangienne:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M = &-\frac{1}{2}B^2 + \gamma\frac{i}{2}\Big(\phi^*(D_t\phi) - \phi(D_t\phi)^*\Big) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(D_k\phi)(D_k\phi)^* \\ &-\frac{\lambda}{8}(1-|\phi|^2)^2 + \mu(Ba_t + E_2a_1 - E_1a_2) - \gamma a_t - \vec{a}\cdot\vec{J^T}\end{aligned} \tag{0.36}$$

où a_t, a_1, a_2 sont les potentiels dont dérive le champ électromagnétique $(\vec{E}, B)$. $\vec{J^T}$ est la valeur asymptotique, supposée constante, du courant de matière

$$\vec{J_s} = \frac{1}{2i}\Big((\vec{D}\phi)\phi^* - \phi(\vec{D}\phi)^*\Big). \tag{0.37}$$

L'absence du terme électrique, $|\vec{E}|^2$, du lagrangien de Maxwell est justifiée par la symétrie galiléenne du modèle. La présence du terme γa_t justifie (iii) par une modification de la loi de Gauss chez Jackiw–Pi. Cependant, elle brise l'invariance galiléenne qui est alors rétablie par le terme $\vec{a}\cdot\vec{J^T}$. $\vec{J^T}$ est appelé courant de transport.

Dans un référentiel privilégié, où $\vec{J^T} = 0$, Manton a établi que les solutions originales du modèle de Nielsen et Olesen, trouvées par Bogomol'nyi [BOG] (0.9), vérifient les équations statiques de son modèle. Ces solutions plongées sont purement magnétiques. Comme nous l'avons remarqué dans Ref. [HHY1], elles peuvent être généralisées à des solutions, toujours self-duales, mais avec une charge électrique. Le système des équations de Manton se réduit alors à

$$\begin{aligned}a_t &= \tfrac{1}{4\mu}\big(\mp 1 + \tfrac{\gamma}{\mu}\big)\big(1-\varrho\big), \\ \vec{a} &= \pm\tfrac{1}{2}\vec{\nabla}\times\ln\varrho + \vec{\nabla}\omega, \\ \triangle\ln\varrho &= \pm\frac{\gamma}{\mu}\big(\rho - 1\big).\end{aligned} \tag{0.38}$$

Notons que le modèle n'est pas une généralisation directe de celui de Jackiw et Pi. Les solutions du modèle de Manton sont en effet "topologiques" dans le sens que $|\phi| \to 1$ à

l'infini spatial (tout comme dans le modèle de Nielsen et Olesen [NO]). De même, l'équation de Liouville (0.28) ne s'obtient pas de (0.38) par une procédure continue. Cependant, une légère modification du modèle de Manton,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}_M =& -\frac{\beta}{2}(B)^2 + \frac{i}{2}\Big(\phi^*(D_t\phi) - \phi(D_t\phi)^*\Big) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(D_k\phi)(D_k\phi)^* \\ &- \frac{\lambda}{8}(\gamma - |\phi|^2)^2 + \mu(Ba_t + E_2a_1 - E_1a_2) - \gamma a_t - \vec{a}\cdot\vec{J}^T,\end{aligned} \tag{0.39}$$

redonne bien le modèle de Jackiw et Pi si l'on pose

$$\beta \to 0, \qquad \gamma \to 0, \qquad \vec{J}^T = 0.$$

B. Symétries.

Après avoir présenté le modèle de Manton, nous avons étudié ses propriétés de symétrie. Le modèle (0.36) peut être interprété de plusieurs manières possibles. D'abord, nous montrons qu'il est équivalent à un système de Chern–Simons en présence d'un champ électromagnétique extérieur. Ce champ extérieur est lié au courant de transport:

$$B^{ext} \equiv \frac{\gamma}{2\mu}, \qquad E_k^{ext} \equiv -\frac{\epsilon_{kl}J_l^T}{2\mu}. \tag{0.40}$$

Le lagrangien (0.36) est alors équivalent à

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{ext} =& \gamma\frac{i}{2}(\phi^*(D_t\phi) - \phi(D_t\phi)^*) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(D_k\phi)(D_k\phi)^* - U(\varrho) - \frac{1}{2}(\tilde{B})^2 \\ &+ \mu(\tilde{B}\tilde{A}_0 + \tilde{E}_2\tilde{A}_1 - \tilde{E}_1\tilde{A}_2)\end{aligned} \tag{0.41}$$

avec $U(\varrho) = (\lambda/8)(1-\varrho)^2$ et

$$\begin{aligned}&\tilde{B} = B - B^{ext}, \qquad \tilde{E}_i = E_i - E_i^{ext} \\ &D_k = \partial_k - ia_k, \quad \text{avec} \quad a_k = \tilde{A}_k + A_k^{ext}.\end{aligned}$$

C'est cette interprétation qui nous a permis de trouver, en plus des symétries évidentes, de nouvelles symétries "composées". En effet, on peut construire une correspondance entre le lagrangien (0.36) et le modèle

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \gamma\frac{i}{2}(\phi^*(D_t\phi) - \phi(D_t\phi)^*) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(D_k\phi)(D_k\phi)^* - U(\varrho) - \frac{1}{2}B^2 \\ &+ \mu(Ba_0 + E_2a_1 - E_1a_2)\end{aligned} \tag{0.42}$$

sans champ extérieur ($A_\mu^{ext}=0, \quad \mu=0,1,2.$). Ce dernier admet le groupe de Schrödinger comme groupe de symétrie lorsque le potentiel est de la forme $g|\phi|^2$. Le potentiel de Manton, en $(1-|\phi|^2)^2$, brise cette symétrie; seules les translations du temps et de l'espace, les rotations et les changements de repères galiléens sont encore des symétries. A l'aide de la correspondance citée plus haut nous "exportons" du modèle (0.41) au modèle de Manton des symétries composées dites symétries "cachées".

C. Un modèle relativiste.

Comme nous l'avons remarqué dans [HHY1], on peut aussi voir le lagrangien (0.36) comme une réduction non relativiste d'une théorie relativiste, donnée par la lagrangien

$$\mathcal{L}_R = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu}a_\rho + \big(D_\mu\psi\big)\big(D^\mu\psi\big)^* + a^\mu J^T{}_\mu + \tfrac{\gamma}{2c^2}\partial_\mu N\partial^\mu N - V. \tag{0.43}$$

où N est un champ scalaire neutre. La forme de ce (nouveau) lagrangien est suggéré par des modèles similaires qu'on trouve dans la littérature [DUN] et en particulier par celui proposé par [LLM].

Par un choix judicieux du potentiel V, nous montrons que le lagrangien (0.36) de Manton est la limite non-relativiste de (0.43). A la limite non-relativiste, l'équation du mouvement pour le champ N se réduit à une expression de N en fonction de $|\phi|^2$. N peut alors disparaître du lagrangien. Nous construisons aussi des solutions self-duales dont la réduction non relativiste correspond exactement au système (0.38).

D. Généralisation aux spineurs.

Nous donnons une généralisation de (0.36) dans un contexte spinoriel en considérant le nouveau modèle:

$$\begin{cases} i\gamma D_t\Phi = -\frac{1}{2}\big[\vec{D}^2 + B\sigma_3\big]\Phi & \text{équa. de Pauli} \\ \epsilon_{ij}\partial_j B = J_i - J_i^T + 2\mu\,\epsilon_{ij}\,E_j & \text{équa. d'Ampère} \\ 2\mu B = \gamma\big(1-|\Phi|^2\big) & \text{loi de Gauss} \end{cases} \tag{0.44}$$

où σ_3 est la troisième matrice de Pauli et Φ est un spineur à deux composantes. Ces équations dérivent du Lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &-\frac{1}{2}B^2 + \frac{i\gamma}{2}\big[\Phi^\dagger(D_t\Phi) - (D_t\Phi)^\dagger\Phi\big] - \frac{1}{2}(\vec{D}\Phi)^\dagger(\vec{D}\Phi) \\ &+ \frac{B}{2}\Phi^\dagger\sigma_3\Phi + \mu\big(Ba_t + E_2a_1 - E_1a_2\big) - \gamma a_t - \vec{a}\cdot\vec{J}^T. \end{aligned} \tag{0.45}$$

Le courant est maintenant donné par

$$\vec{J} = \frac{1}{2i}\Big(\Phi^\dagger\vec{D}\Phi - (\vec{D}\Phi)^\dagger\Phi\Big) + \vec{\nabla}\times\Big(\frac{1}{2}\,\Phi^\dagger\sigma_3\Phi\Big). \tag{0.46}$$

Le nouveau modèle est aussi une généralisation de la théorie Chern–Simons spinorielle de Duval et al. [DHP1] dans laquelle les équations champs-courant sont données par:

$$\begin{cases} J_i = \kappa\,\epsilon_{ij}\,E_j & \text{équa. d'Ampère} \\ \kappa B = -|\Phi|^2 & \text{loi de Gauss} \end{cases} \tag{0.47}$$

Pour ce modèle, les solutions proposées sont self-duales et purement magnétiques.

Remarquablement, les équations (0.44) admettent aussi des solutions self-duales. La nouveauté par rapport aux résultats exposés dans la référence [DHP1] est que nos vortex ne sont plus purement magnétiques ($a_t \neq 0$). La première équation de (0.44) impose qu'une composante chirale du spineur Φ soit nulle; on obtient alors un courant $\vec{J}_s$ nul. C'est ce résultat et la loi d'Ampère dans (0.47) qui imposent des solutions purement magnétiques dans le modèle de Duval et al. Par contre la nouvelle loi d'Ampère dans (0.44) permet des solutions telles que

$$a_t = \pm\frac{1}{\gamma}B. \tag{0.48}$$

E. Comparaison avec d'autres modèles.

Enfin, nous comparons (0.36) avec d'autres modèles, notamment ceux de Barashenkov–Harin [BH] et Duval-Horvathy-Palla [DHP1]. Nous montrons comment la symétrie du premier modèle est mal définie, à la fois non relativiste pour le champ scalaire et relativiste pour le champ électromagnétique. Quant au second modèle, il est l'équivalent de celui de Manton pour des vortex non topologiques.

QUATRIEME PARTIE: **Vortices in Landau-Ginzburg Model of the Quantized Hall Effect** [HHY2].

Cette partie reprend un article soumis à la revue "Physical Reviews D". Nous étudions le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}b^2 + |\vec{D}\psi|^2 + i\phi\big(|\psi|^2 - 1\big) - i\frac{\kappa}{2}\Big(\phi\vec{\nabla}\times\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\phi\Big), \tag{0.49}$$

où $b = \vec{\nabla}\times\vec{a}$, $\vec{D} = \vec{\nabla} + i\vec{a}$ et ϕ est un potentiel scalaire. Au terme $\frac{1}{2}b^2$ près, (0.49) est le lagrangien de Girvin-MacDonald pour l'effet Hall quantique. On notera l'absence de potentiel d'interaction dans (0.49). Pour la valeur particulière

$$\kappa = \pm\frac{1}{2}, \tag{0.50}$$

le modèle admet des solutions de Bogomol'nyi. Ces solutions représentent des vortex topologiques ou non topologiques suivant que leur énergie est finie ou non. Le modèle (0.49)

est la limite de deux modèles ayant comme lagrangien { (0.49)+*un potentiel d'interaction* $U(\psi)$ }.

Le premier, pour lequel

$$U = \frac{\lambda}{8}(1 - |\psi|^2), \tag{0.51}$$

admet des solutions vortex topologiques pour la valeur particulière

$$\lambda = -\frac{4}{\kappa^2} \pm \frac{8}{\kappa}. \tag{0.52}$$

Le second, pour lequel

$$U = C + \frac{\lambda}{8}|\psi|^2, \tag{0.53}$$

admet des vortex non topologiques pour la même valeur (0.52) de λ. A la limite $\lambda \to 0$, ces deux modèles donnent (0.49) et (0.52) devient (0.50). Enfin nous insistons sur le fait que le modèle de Manton est une généralisation de celui de Girvin–MacDonald. Ce dernier est équivalent au modèle de Zhang, Hanson et Kivelson [ZHK] pour l'effet de Hall quantique.

I. PRELIMINAIRES

1. VORTEX ET SUPRACONDUCTIVITE; LE MODELE DE LANDAU-GINZBURG.

En théorie classique des champs, on est très souvent intéressé par des solutions, d'équations aux dérivées partielles, régulières, localisées et à énergie finie, appelées solitons, "vortex" en dimension 2+1 et "monopôles" en dimensions 3+1. En général, ces solutions représentent des particules; elles peuvent aussi représenter un champ magnétique localisé. Cette définition du soliton est très générale. Pour une définition plus précise, on pourra se référer à [BMS].

Remarque: il existe d'autres définitions du soliton selon la science étudiée; par exemple pour la mécanique des fluides et l'optique voir [DRA], pour la théorie de l'intégrabilité voir [FAD].

Les vortex ont été observés en physique de la matière condensée particulièrement dans les supraconducteurs. Beaucoup de matériaux exhibent le phénomène de supraconductivité lorsqu'ils sont refroidis au delà d'une certaine température dite critique T_c. L'état supraconducteur est défini par les propriétés macroscopiques suivantes:

1. la résistance électrique du matériau s'annule.

2. le champ magnétique s'annule dans le matériau; ce phénomène est connu sous le nom d'effet Meissner.

Au niveau microscopique, la supraconductivité est décrite par la théorie de Bardeen, Cooper et Schieffer (BCS). Dans cette théorie, l'état supraconducteur s'explique par la formation de doublets d'électrons: les paires de Cooper. Sous l'action de forces faibles, deux électrons interagissent pour donner une unique particule dont la charge électrique est le double de celle de l'électron. Mais des forces extérieures peuvent briser les paires de Cooper et ramener le matériau dans son état normal. L'état supraconducteur est caractérisé par la densité des paires de Cooper qui sont décrites par un champ scalaire chargé ψ, appelé paramètre d'ordre. La densité $|\psi(\vec{x})|^2$ est proportionnelle à la densité des paires de Cooper. Dans l'état normal, $\psi \sim 0$ et dans l'état supraconducteur $|\psi|$ atteint son maximum.

Il existe deux types de supraconducteurs: les supraconducteurs de type 1 et 2. Ils sont caractérisés par leur réponse à un champ magnétique extérieur, H.

En dessous d'une valeur critique $H_{critique}$ de H, le champ magnétique est totalement expulsé d'un supraconducteur de type 1. Pour $H > H_{critique}$, le champ magnétique pénètre entièrement le matériau.

Pour un supraconducteur de type 2, le champ magnétique pénètre le matériau par étape: pour $H < H_{c1}$, le champ magnétique est expulsé; pour $H_{c1} < H < H_{c2}$, le champ

pénètre le matériau par des "tubes de champ" autour desquels tourne un supracourant; à cause de ces tourbillons de courant, les "tubes de champ" sont appelés vortex; le flux magnétique est un multiple entier d'un flux élémentaire,

$$\Phi = n(\frac{\pi\hbar}{e}), \tag{1.1}$$

où n est un entier et e le charge de l'électron. Pour $H > H_{c2}$, le matériau est dans son état normal et le champ le pénètre entièrement.

Dans l'état intermédiaire $H_{c1} < H < H_{c2}$, le champ magnétique est concentré autour de points discrets. Pour expliquer cette particularité des supraconducteurs de type 2, Landau et Ginzburg, [LP], [AB], ont proposé un système d'équations décrivant l'interaction entre le champ ψ et le potentiel vecteur $\vec{A}$ dont dérive le champ magnétique $\vec{B}$. Le modèle est indépendant du temps et le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan représentant le supraconducteur (on prendra alors $\vec{B} = (0, 0, B)$). L'énergie de l'interaction est donnée par

$$E = \int \{\frac{B^2}{8\pi} + \frac{\hbar^2}{4m}|\vec{D}\psi|^2 + a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4\}d^2\vec{x}, \tag{1.2}$$

où $\vec{D}$ est la dérivée covariante:

$$\vec{D} \equiv \vec{\nabla} - i\frac{2e}{\hbar}\vec{A},$$

$\hbar$ est la constante de Planck, e la charge électrique de l'électron. Les coefficients a et b dépendent de la température, la composition du matériau, etc; $a < 0$ et $b > 0$.

Les équations du champ obtenues en minimisant l'énergie sont

$$\begin{aligned} &\frac{i\hbar}{4m}\vec{D}^2\psi + a\psi + b|\psi|^2\psi = 0, \\ &\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{j}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

où le supracourant s'exprime par

$$\vec{j} = \frac{e\hbar}{2mi}(\psi^*(\vec{D}\psi) - \psi(\vec{D}\psi)^*). \tag{1.4}$$

2. LE MODELE ABELIEN DE HIGGS.

2.1. *Le modèle*

Ce modèle a été utilisé pour la première fois par Higgs pour illustrer le mécanisme qui porte son nom. Il est aussi utilisé, et c'est le cas qui nous intéresse, comme généralisation relativiste du modèle de Landau-Ginzburg.

On considère l'espace minkowskien $(R \times R^2, g_{\mu\nu} = (-1, 1, 1))$ sur lequel on définit le lagrangien [NO]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu\phi)(D^\mu\phi) - \frac{\lambda}{8}(|\phi|^2 - 1)^2, \tag{2.1}$$

avec $\vec{D} \equiv \vec{\nabla} - i\vec{A}$. Les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu\phi &= \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - 1)\phi, \\ \partial^\mu F_{\nu\mu} &= j_\nu \equiv \frac{i}{2}((D_\nu\phi)\phi^* - (D_\nu\phi)^*\phi). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dans le cas statique et purement magnétique ($A_0 = 0$), le champ électrique s'annule ($F_{0i} = 0$ pour $i = 1, 2$) et les équations du champ se réduisent à

$$\begin{aligned} \vec{D}^2\phi &= \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - 1)\phi, \\ \partial_k F_{jk} &= \frac{i}{2}((D_j\phi)\phi^* - (D_j\phi)^*\phi), \end{aligned} \tag{2.3}$$

qui sont, à une constante près, les équations de Landau-Ginzburg. Le flux du champ magnétique F_{12} est alors quantifié; en effet

$$\Phi = \int F_{12}dxdy = \oint A_k dx^k. \tag{2.4}$$

Ecrivant $\phi = |\phi| \exp(i\chi)$, on obtient de l'équation

$$A_k = \frac{j_k}{|\phi|^2} + \partial_k\chi. \tag{2.5}$$

En supposant qu'il n'y a pas de courant à l'infini, on obtient

$$\Phi = \oint \partial_k\chi(x)dx^k, \tag{2.6}$$

et puisque ϕ est univoque, $\chi(r, \varphi + 2\pi n) = \chi(r, \varphi)$ (n entier); on a alors

$$\Phi = n\Phi_0 \qquad \text{avec} \qquad \Phi_0 = 2\pi. \tag{2.7}$$

Le flux est donc quantifié, 2π étant le quantum.

2.2.*Solutions radiales.* [NO]

Cherchons une solution radiale pour la valeur $n = 1$. Dans une jauge convenable, les champs peuvent s'écrire

$$A_r = 0, \qquad A_\theta = A(r), \qquad \phi = f(r)e^{i\theta}. \tag{2.8}$$

Pour avoir un "winding number" égal à l'unité et une énergie finie, nous demandons les conditions asymptotiques suivantes:

$$A(r) \sim \frac{1}{r}, \qquad f(r) \to 1, \quad \text{quand} \quad r \to \infty. \tag{2.9}$$

Avec les champs (2.8), les équations du second ordre (2.3) deviennent

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - (A - \frac{1}{r})^2 f + \frac{\lambda}{2}(1 - f^2)f = 0, \\ &\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA}{dr} - \frac{A}{r^2} + (A - \frac{1}{r})f^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Jusqu'à présent, aucune solution analytique d'un tel système n'a été trouvée. Cependant, en utilisant les conditions aux limites (2.9), on peut déterminer le comportement asymptotique des solutions. En insérant la valeur asymptotique $f^2 \simeq 1$ dans la seconde équation de (2.10) et en écrivant $A(r)$ sous la forme

$$A(r) = \frac{1}{r} + a(r),$$

nous trouvons que $a(r)$ vérifie l'équation de Bessel,

$$\frac{d^2 a}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{da}{dr} - a(\frac{1}{r^2} - 1) = 0, \tag{2.11}$$

dont la solution est la fonction de Bessel à argument imaginaire,

$$a(r) = CK_1(r),$$

C étant une constante. On en déduit le comportement asymptotique suivant pour les champs $A(r)$ et $B(r)$:

$$A(r) \sim \frac{1}{r} + \sqrt{\frac{c}{r}}e^{-r}, \qquad B(r) = \frac{1}{r}\partial_r(rA) \sim B_0 e^{-r}. \tag{2.12}$$

Pour obtenir le comportement asymptotique de $f(r)$, on pose $f(r) = 1 + \varphi(r)$ dans la première équation de (2.10) qui devient

$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{r} - \lambda\varphi = 0, \tag{2.13}$$

qui est encore une équation de Bessel avec un argument imaginaire. On en déduit asymptotiquement,

$$\varphi \sim \varphi_0 e^{-\sqrt{\lambda}r}.$$

2.3. *Vortex et auto-dualité.* [BOG], [JT]

A. Jaffe et C. Taubes ont montré l'existence de solutions de type vortex pour une valeur particulière de λ. Toujours dans le cas statique et purement magnétique, l'énergie est

$$E = \int \{\frac{1}{2}F_{12}^2 + \frac{1}{2}|D_k\phi|^2 + \frac{\lambda}{8}(|\phi|^2 - 1)\}^2 dxdy. \tag{2.14}$$

Bogomol'nyi [BOG] a montré que pour la valeur particulière $\lambda = 1$, le minimum de l'énergie est atteint par des champs satisfaisant à des équations du premier ordre; en effet en utilisant l'identité

$$\sum_{k=1}^{2} |D_k\phi|^2 = |(D_1 \pm D_2)\phi|^2 \pm F_{12}|\phi|^2 \pm \vec{\nabla} \times \vec{J} \tag{2.15}$$

et en suppposant qu'il n'y a pas de courant à l'infini, l'énergie s'écrit

$$E = \int \{\frac{1}{2}|(D_1 \pm D_2)\phi|^2 + \frac{1}{2}(F_{12} \mp \frac{1}{2}(1 - |\phi|^2))^2 + \frac{1}{8}(\lambda - 1)(1 - |\phi|^2)^2\} dxdy \pm \frac{1}{2}\Phi. \tag{2.16}$$

Pour $\lambda = 1$ on a alors, puisque l'énergie est positive

$$E \geq \pi|N|. \tag{2.17}$$

Si $N \geq 0$, le minimum d'énergie est atteint si et seulement si

$$\begin{aligned} (D_1 + iD_2)\phi &= 0, \\ F_{12} &= \frac{1}{2}(1 - |\phi|^2). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Si $N \leq 0$, $E = -\pi N$ si et seulement si

$$\begin{aligned} (D_1 - iD_2)\phi &= 0, \\ F_{12} &= -\frac{1}{2}(1 - |\phi|^2). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ces équations sont dites de "Bogomolny"; on en déduit une équation du type de celle de Liouville

$$\Delta \ln |\phi|^2 = \frac{1}{2}(|\phi|^2 - 1). \tag{2.20}$$

L'existence de solutions vortex se déduit alors du théorème suivant:

Théorème (Jaffe-Taubes) [JF]

Soit un entier positif N et un ensemble $\{z_i\}, i = 1, \ldots, N$ *de N points de* $\mathbf{C}$*; le système d'équations (2.18) admet une solution à energie finie, unique à une jauge près, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) La solution est C^∞

(ii) L'ensemble des zéros de ϕ *est* $\{z_i\}$*. Au voisinage de* z_j*,*

$$\phi(z, \bar{z}) \sim c_j (z - z_j)^{n_j}$$

avec $c_j \neq 0$ *et* n_j *entier positif.*

De plus, pour cette solution

(a)

$$|\vec{D}\phi| \leq \text{const.}\,(1 - |\phi|) \leq \text{const.}\,\exp(-(1-\delta)|z|),$$

pour tout réel positif δ *et où* const. *est une constante réelle ne dépendant que de* δ*.*

(b) $\Phi = 2\pi(\sum_{\text{distinct } z_j} n_j)$.

Si $N < 0$*, il y a toujours existence et unicité (à une jauge près) de la solution pour le système mais avec*

$$\bar{\phi}(z, \bar{z}) \sim c_j (z - z_j)^{n_j} \qquad quand \qquad z \to z_j,$$

et

$$\Phi = -2\pi(\sum_{\text{distinct } z_j} n_j)$$

avec ici $n_j > 0$ *et* $c_j \neq 0$*.*

Jaffe et Taubes ont aussi montré que pour $\lambda = 1$, le système du second ordre (2.3) n'admet pas d'autres solutions que celles du théorème précédent.

Les vortex obtenus à partir des modèles précédents sont électriquement neutres puisque, dans le modèle de Landau-Ginzburg, il n'y a pas de champ électrique et que dans celui de Higgs nous avons posé $A_0 = 0$. On peut se poser la question de l' existence, en dimension 2, de particules qui portent une charge magnétique et une charge électrique. Julia et Zee ont montré que le modèle abélien de Higgs n'admet aucune solution à énergie finie avec

une charge électrique [JZ]. Pour décrire les particules précédentes, nous allons faire appel à d'autres modèles. Leur existence viendra de la présence, dans le lagrangien, d'un nouveau terme dit de Chern-Simons. Un tel lagrangien peut être un modèle phénoménologique pour l'effet de Hall quantique ou pour la supraconductivité à haute température.

3. L'EFFET HALL QUANTIQUE.

L'effet Hall classique fut découvert au siècle dernier: on applique un champ électrique, $\vec{E}_1$, dans un matériau conducteur de très faible épaisseur; il nait alors un courant électrique dans le conducteur; lorsqu'on plonge ce conducteur dans un champ magnétique, $\vec{B}$, qui lui est perpendiculaire, le courant d'électrons est soumis à une force normale à $\vec{B}$ et $\vec{E}_1$; il s'opère une redistribution non uniforme des électrons dans le conducteur, distribution qui crée un champ électrique, $\vec{E}$, (ou une tension) perpendiculaire au courant: le champ de Hall. La relation entre le courant, $\vec{J}$, d'électrons et les champs $\vec{E}$, $\vec{E}_1$ est donnée par:

$$\vec{J} = \mu_{\text{Ohm}} \vec{E}_1 + \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \vec{E}. \tag{3.1}$$

Pour une même valeur de B, la conductance de Hall, κ, croît de manière continue avec la densité du courant d'électrons.

Quand on réalise la même expérience, à une température de un ou deux degrés Kelvin et un champ magnétique très fort, avec un tapis d'électrons condamnés à ne se mouvoir que dans un plan, il y a toujours création d'une tension de Hall. Cependant, la résistivité ohmique μ_{Ohm} s'annule; la loi d'Ohm devient

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \vec{E}. \tag{3.2}$$

Plus surprenant encore, la conductance de Hall ne varie plus continuement avec la densité du courant; elle évolue par palier avec des valeurs qui restent constantes dans certains intervalles; à chaque plateau, la conductance de Hall prend des valeurs entières d'un quantum de conductance dont la valeur est e^2/h:

$$\kappa = n(e^2/h), \qquad n \text{ entier}. \tag{3.3}$$

Ce phénomène constitue l'effet Hall quantique entier; il a été mis en évidence en 1980 par Klaus von Klitzing.

En 1982, Daniel C. Tsui, Horst L. Störmer et Arthur C. Gossard ont mis à jour une autre propriété étonnante de l'effet Hall quantique. La conductance de Hall prend aussi des valeurs fractionnaires constantes du quantum de conductance; c'est l'effet Hall quantique fractionnaire.

En résumé, l'électrodynamique de l'effet Hall quantique est donnée par les équations de la forme:

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}.\vec{B} = 0, \\ &\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{0}, \\ &\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \vec{E}, \\ &\partial_t \varrho + \vec{\nabla}.\vec{J} = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

plutôt que les équations de Maxwell.

Le premier modèle, en théorie classique des champs, qui tente une description macroscopique de ce phénomène est celui de Girvin et MacDonald (1987) [GIR]; il est donné par le lagrangien:

$$\mathcal{L} = |\vec{D}\psi|^2 + i\phi(|\psi|^2 - 1) - i\frac{\kappa}{2}\Big(\phi\vec{\nabla} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{\nabla}\phi\Big). \tag{3.5}$$

Ici, $i\phi$ représente le potentiel électrique (que nous notons en général a_0). Ce modèle est statique. Le dernier terme est appelé "terme de Chern-Simons", il permet d'établir les équations d'une théorie électrodynamique dite de "Chern-Simons" qui rend compte de l'effet Hall quantique. Les équations variationnelles sont bien de la forme (3.4)

Deux ans plus tard, Zhang, Hansson et Kivelson [ZHK] ont proposé le modèle suivant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z =& 4\theta\epsilon^{ij}\big(2a_0\partial_i a_j - a_i\partial_0 a_j\big) - \frac{1}{4\theta}\epsilon^{\mu\nu\sigma}a_\mu\partial_\nu a_\sigma \\ & \psi^*[i\partial_0 - \big(a_0 + a_0^{ext}\big)]\psi + \psi^*[-i\vec{\nabla} - \big(\vec{a} + \vec{a}^{ext}\big)]^2\psi + U(\psi), \end{aligned} \tag{3.6}$$

où a_μ^{ext} est le potentiel vecteur d'un champ électromagnétique extérieur, et $U(\psi) = \mu|\psi|^2 - \lambda|\psi|^4$ est un potentiel d'interaction. (3.6) est une généralisation de (3.5). Ce lagrangien est issu de la théorie quantique des champs.

4. SYMETRIES.

L'étude des symétries d'un problème joue un rôle important en physique théorique; elles permettent notamment de:

1. trouver des solutions à partir de solutions statiques, plus faciles à déterminer.

2. de déterminer les quantités conservées associées aux symétries; ces quantités peuvent renseigner sur l'évolution dans le temps des solutions par les relations qu'elles ont entre elles.

3. d'étudier l'intégrabilité complète du problème: existence de paires de Lax (voir le chapitre suivant).

4.1. *Symétries et théorème de Noether.*

Définition[BLU]

Soit un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre p de n variables indépendantes $x = (x^1, .., x^n)$ et m variables dépendant de x, $u = (u^1, .., u^m)$

$$\Delta_k\big(x, u, u_{(1)}, ..., u_{(p)}\big) = 0 \qquad k = 1, ... \tag{4.1}$$

où $u_{(l)}$ représente toutes les dérivées partielles d'ordre l de u. Tout groupe de Lie de transformations

$$x \to \tilde{x} = \alpha(x, u), \quad u \to \tilde{u}(\tilde{x}) = \beta(x, u), \tag{4.2}$$

est une symétrie du système si $\tilde{u}(\tilde{x})$ est une solution de (4.1), exprimée avec $\tilde{x}$ et $\tilde{u}$, chaque fois que $u(x)$ en est une.

On construit ainsi, à partir d'une solution $u(x)$ de (4.1), une nouvelle solution; par exemple, dans le cas où la transformation (4.2) se réduit à

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = (\alpha(x), \beta(x, u)),$$

α étant inversible, une solution $u(x)$ se transforme en une autre solution

$$\bar{u}(x) = \beta(\alpha^{-1}(x); u(\alpha^{-1}(x))). \tag{4.3}$$

Si on considère un groupe de Lie de transformations à un paramètre,

$$\tilde{x} = g_\epsilon(x) \in R^n, \tag{4.4}$$

alors la transformation

$$\tilde{x} = x + \epsilon\, \xi(x), \tag{4.5}$$

où $\xi(x) = \dfrac{d}{d\epsilon} g_\epsilon(x)|_{\epsilon=0}$ est appelée transformation infinitésimale associée à (4.4).

On définit alors le générateur infinitésimal du groupe (4.4) comme étant l'opérateur

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \partial_{x^i},$$

qui agit sur un espace de fonction dépendant de x. La relation entre la transformation (4.4) et son générateur infinitésimal est donnée par:

$$\tilde{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}(X^k x) \equiv \exp\big(\epsilon X\big)x$$

avec $X^0 f(x) \equiv f(x)$.

Pour un groupe de Lie de transformations à r paramètres

$$\begin{aligned} &\tilde{x} = g(x,\epsilon) \in R^n, \\ &\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r), \end{aligned} \tag{4.6}$$

le générateur infinitésimal $X_k(x)$ correspondant au paramètre ϵ_k est donné par:

$$X_k(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i(x)\partial_{x^i}, \qquad k \in 1, \ldots, r,$$

avec $\xi_{k,i}(x) = \dfrac{d}{d\epsilon_k} g_\epsilon^i(x)|_{\epsilon_k=0}$ et on retrouve le groupe, à partir du générateur infinitésimal, en calculant:

$$\tilde{x} = \exp\Big(\sum_{i=1}^{r} \mu_i X_i\Big)x,$$

les μ_i étant des constantes réelles quelconques.

Puisqu'en général, (4.1) dérive d'une formulation variationnelle, c'est-à-dire d'une action

$$I = \int \mathcal{L}(u, \partial_\mu u, x^\mu)\, d^n x \tag{4.7}$$

(le lagrangien $\mathcal{L}$ dépend des coordonnées d'espace, de u et de ses dérivées partielles premières), on peut aussi exprimer le point de vue équivalent du physicien.

Considérons la transformation

$$x^\mu \to \tilde{x}^\mu, \qquad u(x) \to \tilde{u}(\tilde{x});$$

infinitésimalement, au premier ordre elle devient

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + X^\mu, \qquad \tilde{u}(\tilde{x}) = u(x) + \delta u(x) + (\partial_\mu u)X^\mu \tag{4.8}$$

où $\delta u \equiv \tilde{u}(x) - u(x)$. La variation de l'action (4.7) suivant (4.8) est, de manière générale, donnée par:

$$\begin{aligned} \Delta I &\equiv \int \mathcal{L}(\tilde{u}, \partial_\mu \tilde{u}, \tilde{x}^\mu)\, d^n x - \int \mathcal{L}(u, \partial_\mu u, x^\mu)\, d^n x, \\ &= \int \Big\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\partial_\mu(\delta u) + \partial_\mu(\mathcal{L}X^\mu) \Big\}\, d^n x. \end{aligned} \tag{4.9}$$

La transformation (4.8) est une symétrie, au sens de Nœther, si l'action I est invariante, soit $\Delta I = 0$.

Théorème de Nœther.

Si la transformation infinitésimale (4.8) laisse l'action invariante, alors la quantité

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\delta u + \mathcal{L}X^\mu, \tag{4.10}$$

est un courant conservé,

$$\partial_\mu J^\mu \equiv \partial_t J^0 + \partial_k J^k = 0. \tag{4.11}$$

Par conséquent l'intégrale

$$C = \int J^0 \, d^{n-1}x = \int \{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u)}\delta u + \mathcal{L}X^t\} \, d^{n-1}x, \tag{4.12}$$

est une constante du mouvement,

$$\frac{dC}{dt} = 0.$$

Une autre définition de la notion de symétrie est donnée par Jackiw, Manton et Forgács [FM], [JM]; la transformation infinitésimale

$$\begin{aligned} x^\mu &\to x^\mu + X^\mu \\ u &\to u + \delta u \end{aligned} \tag{4.13}$$

est une symétrie si l'action change par un terme de surface,

$$I \to I + \int \partial_\alpha K^\alpha \, d^n x. \tag{4.14}$$

Le courant, donné par

$$J^\alpha = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha u)}\delta u - K^\alpha, \tag{4.15}$$

est alors conservé.

4.2. *Groupes de Galilée et de Schrödinger.*

Dans notre travail, nous nous intéressons à des théories non relativistes, c'est-à-dire invariantes par la composante neutre du groupe de transformations de Galilée, à savoir:

1. les translations du temps:

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t' = t + a \\ \vec{x}' = \vec{x} \end{pmatrix}; \tag{4.16}$$

2. les translations de l'espace:

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t' = t \\ \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a} \end{pmatrix}; \tag{4.17}$$

3. les rotations de l'espace:

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t' = t \\ \vec{x}' = \mathcal{R}\vec{x} \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

où $\mathcal{R}$ est une matrice de rotation dans l'espace.

4. les changements de repères galiléens (boosts):

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t' = t \\ \vec{x}' = \vec{x} + t\vec{v} \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

En physique galiléenne, le mouvement dans l'espace $\mathbf{R}^2$ d'une particule libre, décrite par un champ scalaire $\psi(\vec{r}, t)$, est donné par l'équation de Schrödinger (linéaire):

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2m}\Delta\psi = 0 \tag{4.20}$$

où $\Delta \equiv \partial_{xx} + \partial_{yy}$.

Cette équation est invariante par le groupe de Galilée pourvu que le champ scalaire se transforme suivant:

$$\psi'(t', \vec{x}') = \psi(t, \vec{x}), \tag{4.21}$$

lors des trois premières transformations et suivant:

$$\psi'(t', \vec{x}') = \psi(t, \vec{x}) \exp\left[im\vec{v}.(\vec{x} + \vec{v}t/2)\right] \tag{4.22}$$

lors d'un changement de repère galiléen.

Mais l'équation de Schrödinger a un groupe de symétries plus riche. Niederer a montré [NI] que le groupe maximal de symétries "cinématiques" (qui font intervenir des changements, de l'espace et du temps, par opposition aux symétries de jauge ou aux symétries internes) est le groupe de Galilée, auquel on rajoute les transformations suivantes de l'espace-temps:

1. les dilatations du temps:

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t' = a^2 t \\ \vec{x}' = a\vec{x} \end{pmatrix} \quad (a > 0); \tag{4.23}$$

2. les transformations "conformes" appelées aussi expansions:

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t' = \frac{t}{1+bt} \\ \vec{x}' = \frac{1}{1+bt}\vec{x} \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Lors de ces transformations de l'espace le champ scalaire varie respectivement comme:

$$\psi'(t', \vec{x}') = \frac{1}{a}\psi(t, \vec{x}) \qquad \text{pour des dilatations} \tag{4.25}$$

et

$$\psi'(t', \vec{x}') = (1 + bt)\psi(t, \vec{x}) \exp\left[\frac{-ibr^2}{2(1 + bt)}\right] \qquad \text{pour des expansions.} \tag{4.26}$$

Les huit transformations précédentes forment le groupe de Schrödinger.

Preuve[NI]:

Une équation d'onde,

$$\Delta(t, \vec{x})\psi(t, \vec{x}) = 0, \tag{4.27}$$

(où $\Delta(t, \vec{x})$ est un opérateur différentiel des coordonnées $(t, \vec{x})$) est dite invariante, au sens de Niederer, par la transformation inversible

$$(t, \vec{x}) \to g(t, \vec{x}), \tag{4.28}$$

s'il existe une transformation T_g de la fonction d'onde ψ,

$$\psi(t, \vec{x}) \to (T_g\psi)(t, \vec{x}) = f_g[g^{-1}(t, \vec{x})]\psi[g^{-1}(t, \vec{x})], \tag{4.29}$$

pour laquelle $T_g\psi$ est encore une solution de (4.28). La présence d'un facteur de phase f_g correspond ici à des représentations projectives plutôt qu'unitaires.

Trouver de telles transformations revient à déterminer toutes les solutions possibles (g, T_g) de l'équation

$$\Delta[g(t, \vec{x})]\Big\{ f_g(t, \vec{x})\psi(t, \vec{x}) \Big\} = 0, \tag{4.30}$$

pour une solution arbitraire ψ de (4.27).

Pour l'équation de Schrödinger libre,

$$\Delta(t,\vec{x}) = i\partial_t + \frac{1}{2m}(\partial_{xx} + \partial_{yy}) \tag{4.31}$$

et on a:

$$\begin{aligned} 2m\Delta[g(t,\vec{x})] =& c_k^2\partial_t^2 + 2d_{ik}c_k\partial_t\partial_i + d_{ir}d_{kr}\partial_i\partial_k \\ &+ (c_i\dot{c}_i + d_{ik}\partial_i c_k + 2ima)\partial_t \\ &+ (c_k\dot{d}_{rk}\partial_r d_{ik} + 2imb_i)\partial_i, \end{aligned} \tag{4.32}$$

où $\dot{a} \equiv \partial_t a$ et les fonctions réelles a, b_k, c_k et d_{ik} sont définies par:

$$\begin{aligned} a(t,\vec{x}) &= \frac{\partial t}{\partial t'}, & c_i(t,\vec{x}) &= \frac{\partial t}{\partial x'^i}, \\ \vec{b} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial t'}, & d_{ik}(t,\vec{x}) &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

$(t',\vec{x'}) \equiv g(t,\vec{x})$. En insérant (4.32) dans (4.30) et en remplaçant $\dot{\psi}$ par $\frac{i}{2m}\Delta\psi$, on obtient le système différentiel:

$$\begin{aligned} &c_k = 0, \\ &d_{ir}d_{kr} = a\delta_{ik}, \\ &2a\partial_i f_g + (d_{rk}\partial_r d_{ik} + 2imb_i)f_g = 0, \\ &a\Delta f_g + 2ima\dot{f}_g + (d_{rk}\partial_r d_{ik} + 2imb_i)\partial_i f_g = 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

De la seconde équation, on déduit

$$d_{ik} = a^{1/2}R_{ik}^{-1} = a^{1/2}R_{ki}, \tag{4.35}$$

où R est une rotation. De la première équation, on déduit que le système (4.33) est inversible avec comme système inverse:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t'}{\partial t} &= a^{-1}, & \frac{\partial t'}{\partial x^i} &= 0, \\ \frac{\partial x'^i}{\partial t} &= -a^{-3/2}R_{ik}b_k, & \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} &= a^{-1/2}R_{ik}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Les conditions d'intégrabilité de ce système sont données par

$$\partial_i a = 0, \qquad \partial_r R_{ik} = \partial_k R_{ir}, \qquad \partial_k(R_{ir}b_r) = \frac{1}{2}\dot{a}R_{ik} - a\dot{R}_{ik}, \tag{4.37}$$

la seconde de ces équations impliquant que la rotation R ne dépend ni de x, ni de y. Les deux dernières équations de (4.34) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} &\partial_i f_g = -\frac{im}{a} b_i f_g, \\ &\dot{f}_g = \Big(\frac{im}{2a^2}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{2a}\vec{\nabla}.\vec{b}\Big) f_g, \end{aligned} \tag{4.38}$$

avec comme conditions d'intégrabilité

$$\begin{aligned} &\partial_i b_k = \partial_k b_i, \\ &\dot{a} b_i - a\dot{b}_i = b_k \partial_i b_k - \frac{ia}{2m}\partial^2_{ik} b_k. \end{aligned} \tag{4.39}$$

De la première équation de (4.39) et le troisième de (4.37), on déduit

$$R_{ik} = const., \qquad \partial_i b_k = \frac{1}{2}\dot{a}\delta_{ik}; \tag{4.40}$$

ainsi $\vec{b}(t,\vec{x}) = \frac{1}{2}\dot{a}\vec{x} + \vec{h}(t)$, égalité que l'on insère dans la seconde équation de (4.39) pour obtenir

$$\dot{a}^2 = 2a\ddot{a}, \qquad \dot{a}\vec{h} = 2a\dot{\vec{h}}. \tag{4.41}$$

En intégrant les systèmes (4.41) et (4.36), on trouve:

– pour $\dot{a} = 0$:

$$a = \text{const.},$$

$$\vec{b} = \text{const.},$$

$$f_g = \exp\Big[-\frac{im}{a}\big(\vec{b}\cdot\vec{x} - \frac{|\vec{b}|^2}{2a}t + c\big)\Big];$$

où $c = \text{const.}$

– pour $\dot{a} \neq 0$:

$$a = (Bt + D)^2,$$

$$\vec{b} = (Bt + D)(B\vec{x} + D\vec{U}),$$

$$f_g = \frac{1}{2}(Bt + D)\exp\Big[-\frac{im}{2}\big(\frac{B(x^2+y^2)}{Bt+D} + c\big)\Big];$$

B, D et c sont des constantes réelles et $\vec{U}$ est un vecteur constant.

On obtient alors le groupe de Schrödinger avec son extension centrale à 1 paramètre représentée par la constnte c; le groupe de Galilée [étendu] est obtenu pour $\dot{a} = 0$, les dilatations et expansions pour $\dot{a} \neq 0$.

4.3. *Symétries et quantités conservées en théorie des champs non-relativiste.* [FM], [JM].

Dans certains modèles non relativistes (comme en optique non-linéaire), la "particule" décrite dans le paragraphe précédent est en interaction avec elle-même; l'équation qui décrit son mouvement devient:

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2m}\Delta\psi + \frac{dU(\varrho)}{d\varrho}\psi = 0, \tag{4.42}$$

U étant le potentiel d'interaction et $\varrho = |\psi|^2$. Si $U(\varrho)$ est une fonction plus compliquée que linéaire en ϱ, l'équation du mouvement devient non-linéaire; on l'appelle donc *l'équation de Schrödinger non-linéaire.*

Cette équation dérive de l'action

$$I_0 = \int_{R^2} \mathcal{L}_0 = \int_{R^2} \left(i\bar{\psi}\partial_t\psi - \frac{1}{2m}|\vec{\nabla}\psi|^2 + U(\varrho) \right) d\vec{x}dt. \tag{4.43}$$

Pour le potentiel purement quartic en ψ,

$$U(\varrho) = \varrho^2/2,$$

l'équation (4.42) reste invariante par le groupe de Schrödinger. Quand on fait agir les transformations du groupe de Schrödinger sur l'équation de Schrödinger libre (4.20), celle-ci reste inchangée à un facteur près; en utilisant les transformations du champ ψ, on voit que le terme non linéaire, en $|\psi|^2\psi$, change avec le même facteur que l'équation linéaire libre. (4.42) est alors invariante.

Les quantités conservées, données par (4.12), sont alors:

1. l'énergie

$$E = \frac{1}{2}\int (|\vec{\nabla}\psi|^2 - g\varrho^2) d^2\vec{x} \tag{4.44}$$

pour les translations du temps;

2. l'impulsion

$$\vec{P} = \int \vec{p} dxdy \equiv \int \frac{1}{2i}(\psi^*(\vec{\nabla}\psi) - \psi(\vec{\nabla}\psi)^*)\, d^2\vec{x} \tag{4.45}$$

pour les translations d'espace;

3. le moment angulaire

$$J = \int \vec{x} \times \vec{p}\, d^2\vec{x} \tag{4.46}$$

pour les rotations d'espace;

4.

$$\vec{B} = t\vec{P} - \int \varrho\vec{r}\, d^2\vec{x}, \tag{4.47}$$

pour les changements de repères galiléens (boosts);

5.

$$D = tE - \frac{1}{2}\int \vec{x}.\vec{p}\, d^2\vec{x} \tag{4.48}$$

pour les dilatations;

6.

$$K = -t^2E + 2tD + \frac{1}{2}\int \varrho r^2\, d^2\vec{x} \tag{4.49}$$

pour les expansions.

Notons qu'en faisant opérer le générateur de l'extension centrale sur le champ ψ comme

$$\psi'(t', \vec{x}') = e^{im}\psi(t, \vec{x}), \tag{4.50}$$

on obtient une neuvième quantité conservée, en l'occurence la masse,

$$M = \int \varrho\, d^2\vec{x}. \tag{4.51}$$

La particule peut être placée dans un champ életromagnétique extérieur $(\vec{E}^{ext}, \vec{B}^{ext})$ dérivant du potentiel de jauge A_μ^{ext} non dynamique. L'équation du mouvement de la particule est maintenant décrite par le lagrangien avec couplage minimal, où la dérivée covariante remplace la dérivée partielle,

$$\begin{aligned} L &= \int_{R^2} \left(i\bar{\psi}D_t\psi - \frac{1}{2m}|\vec{D}\psi|^2 + \frac{\varrho^2}{2} \right) d^2\vec{x}, \\ D_\mu &= \partial_\mu - iA_\mu^{ext}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Le groupe de Schrödinger n'est plus un groupe de symétrie en général. Cependant, certaines symétries peuvent persister. Soit en effet X^α un champ de vecteurs sur l'espace-temps, qui est une symétrie du cas libre. L'invariance du champ extérieur est réalisée *à une transformation de jauge près* (A_μ^{ext} est symétrique par rapport à X^α), s'il existe une fonction W telle que

$$\delta A_\mu^{ext} = \partial_\mu W. \tag{4.53}$$

Puisque

$$\delta A^{ext}_{\mu} = X^{\alpha} F^{ext}_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}(X^{\alpha} A^{ext}_{\alpha}),$$

on peut écrire la condition d'invariance du champ extérieur comme:

$$X^{\alpha} F^{ext}_{\alpha\mu} = \partial_{\mu}\Psi, \qquad \Psi = -A^{ext}_{\alpha} X^{\alpha} + W. \tag{4.54}$$

Ainsi, les transformations du groupe de Schrödinger qui restent des symétries du modèle (4.50) sont les translations du temps et de l'espace;

$$\Psi = B^{ext}\vec{\gamma} \times \vec{x} + t\vec{\gamma}.\vec{E}^{ext} + \vec{x}.\vec{E}^{ext}\epsilon \quad \text{où} \quad \epsilon \in \mathbf{R}, \quad \vec{\gamma} \in \mathbf{R}^2. \tag{4.55}$$

Si la particule est placée dans un champ extérieur purement magnétique, $\vec{E}^{ext} = 0$, alors les rotations sont encore des symétries et, dans ce cas,

$$\Psi = \frac{B^{ext}}{2}(x^2 + y^2). \tag{4.56}$$

Les constantes du mouvement, dans ce dernier cas, sont

$$\begin{aligned} E_{B^{ext}} &= E + \frac{B^{ext}}{4} K - \frac{B^{ext}}{2} J, \\ P^k_{B^{ext}} &= P^k + \frac{B^{ext}}{2} \epsilon^{kj} B^j, \\ J_{B^{ext}} &= J, \end{aligned} \tag{4.57}$$

où les constantes du mouvement $E, K, J, \vec{P}, \vec{B}$, sont données par (4.44-4.49).

4.4. *Méthode pour déterminer le groupe de symétrie d'une e.d.p.*[BLU]

Nous allons présenter une méthode générale pour déterminer les générateurs infinitésimaux du groupe de symétrie d'une équation aux dérivées partielles.

La méthode ne présente pas de difficulté particulière de calculs, mais ces derniers sont assez fastidieux. Pour cette raison nous commençons par le cas le plus simple qui, une fois compris, pourra être généralisé à une e.d.p. quelconque.

a/ *Cas d'une variable dépendante et d'une variable indépendante*

Soit l'équation différentielle

$$\Delta(x, u, u', \ldots, u_{(p)}) = 0, \tag{4.58}$$

où $x \in \mathbf{R}$, $u(x) \in \mathbf{R}$ et $u_{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de u. (4.58) peut s'écrire localement $u_{(p)} = f(x, u, \ldots, u_{(p-1)})$.

Considérons le groupe de Lie de transformations à un paramètre ϵ suivant

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= g(x,u,\epsilon), \\ \tilde{u} &= U(x,u,\epsilon). \end{aligned} \tag{4.59}$$

On suppose que la transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}$$

est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$

On définit la k^{ieme} extension du groupe (4.59), qui est un groupe de Lie à un paramètre ϵ agissant sur l'espace $(x, u, u', \ldots, u_{(k)})$, par:

$$\begin{aligned} &\tilde{x} = g(x,u,\epsilon) \\ &\tilde{u} = U(x,u,\epsilon) \\ &\tilde{u}' = U_1(x,u,u',\epsilon) \\ &\ldots \\ &\tilde{u}^{(k)} = U_k(x,u,u',\ldots,u_{(k)},\epsilon) = \Big(\frac{D\,U_{k-1}}{Dx}\Big)/\Big(\frac{D\,g}{Dx}\Big), \end{aligned} \tag{4.60}$$

où $U_0(x,u,\epsilon) \equiv U(x,u,\epsilon)$ et $\frac{D}{Dx}$ est l'opérateur de dérivation totale:

$$\frac{D}{Dx}F(x,u,u',\ldots,u_{(l)}) = \partial_x F + u'\partial_u F + \ldots + u_{(l+1)}\partial_{u_{(l)}} F. \tag{4.61}$$

Remarque: Dans (4.60), $\tilde{u}^{(k)}$ est l'expression de la dérivée $\dfrac{d^k\tilde{u}}{d\tilde{x}^k}$ compte tenu de la transformation (4.59).

Si $X = \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u$ est le générateur infinitésimal du groupe (4.59), alors celui de la k^{ieme} extension du groupe est:

$$X^{(k)} = X + \sum_{l=1}^{k} \eta^{(l)}(x,u,\ldots,u_{(l)})\partial_{u_{(l)}}, \tag{4.62}$$

avec

$$\eta^{(l)}(x,u,\ldots,u_{(l)}) = \frac{D\eta^{(l-1)}}{Dx} - u_{(l)}\frac{D\xi}{Dx} \tag{4.63}$$

et $\eta^{(0)} \equiv \eta(x,u)$.

Proposition:

Le groupe (4.59) est une symétrie de (4.58) si et seulement si

$$X^{(n)}\Big(\Delta(x,u,\ldots,u_{(p)})\Big)=0 \qquad \text{quand} \qquad \Delta(x,u,\ldots,u_{(p)})=0 \tag{4.64}$$

ou encore

$$\begin{aligned}&\eta^{(p)}\Big(x,u,\ldots,u_{(p)}\Big)=X^{(p-1)}\Big(f(x,u,\ldots,u_{(p-1)})\Big) \qquad \text{quand}\\ &u_{(p)}=f(x,u,\ldots,u_{(p-1)})=0\end{aligned} \tag{4.65}$$

b/ *Cas d'une variable dépendante et n variables indépendantes.*

On considère maintenant l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta(x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(p)})=0, \tag{4.66}$$

où $x\in R^n$, $u(x)\in R$ et $u_{(l)}$, $\quad l\in\{1,\ldots,p\}$, représente toutes les dérivées partielles d'ordre l de u. Soit

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=g(x,u,\epsilon),\\ \tilde{u}&=U(x,u,\epsilon),\end{aligned} \tag{4.67}$$

un groupe de Lie de transformations à un paramètre ϵ ayant

$$X=\xi^i(x,u)\partial_{x^i}+\eta(x,u)\partial_u$$

comme générateur infinitésimal.

On notera $g\equiv(g^1,\ldots,g^n)$, $u_i\equiv\partial_{x^i}u$, $\tilde{u}_i\equiv\partial_{\tilde{x^i}}\tilde{u}$ (ne pas confondre u_i et $u_{(l)}$, le premier étant une dérivée partielle d'ordre 1 et le second l'ensemble des dérivées partielles d'ordre l) et la dérivée totale par rapport à x^i,

$$D_iF(x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(l)})\equiv\frac{\partial F}{\partial x^i}+u_i\frac{\partial F}{\partial u}+u_{ij}\frac{\partial F}{\partial u_j}+\ldots+u_{ii_1i_2\ldots i_l}\frac{\partial F}{\partial u_{i_1i_2\ldots i_l}}.$$

La l^{ieme} extension du groupe (4.67) est définie par:

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=g(x,u,\epsilon),\\ \tilde{u}&=U(x,u,\epsilon),\\ \tilde{u}_{(1)}&=U_{(1)}(x,u,u_{(1)},\epsilon),\\ &\ldots\\ \tilde{u}_{(l)}&=U_{(l)}(x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(l)},\epsilon),\end{aligned} \tag{4.68}$$

où les $U^{(l)}$ sont définis par:

$$A\,U_{(1)} = A\,\tilde{u}_{(1)} = A \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 U \\ D_2 U \\ \vdots \\ D_n U \end{pmatrix}, \tag{4.69}$$

$U_{(l)}$ étant déterminé à partir de $U_{(l-1)}$:

$$A \begin{pmatrix} \tilde{u}_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1} 1} \\ \tilde{u}_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1} 2} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1} n} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1} 1} \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1} 2} \\ \vdots \\ U_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1} n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 U_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1}} \\ D_2 U_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1}} \\ \vdots \\ D_n U_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1}} \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} D_1 g^1 \ldots & D_1 g^n \\ \vdots & \vdots \\ D_n g^1 \ldots & D_n g^n \end{pmatrix}.$$

La l^{ieme} extension est aussi un groupe de Lie à un paramètre ϵ dont le générateur infinitésimal est

$$X^{(l)} = X + \eta_i(x, u, u_{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_i} + \ldots + \eta_{i_1 i_2 \ldots i_l}(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(l)}) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \ldots i_l}}, \tag{4.71}$$

avec

$$\eta_i = D_i \eta - (D_i \xi^j) u_j \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\eta_{i_1 i_2 \ldots i_l} = D_{i_l} \eta_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1}} - (D_{i_l} \xi^j) u_{i_1 i_2 \ldots i_{l-1} j}.$$

Proposition:

Le groupe de Lie (4.67) est une symétrie du système (4.66) si et seulement si

$$X^{(p)} \Delta(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(p)}) = 0 \qquad \text{quand} \tag{4.72}$$

$$\Delta(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(p)}) = 0. \tag{4.73}$$

On utilise la proposition précédente pour déterminer le générateur infintésimal du groupe (4.67): en tenant compte de (4.73), on développe l'équation (4.72); après identification des coefficients des $u_{(l)}$ on obtient un système d'équations pour $\xi^i(x, u)$ et $\eta(x, u)$.

On se rend compte de l'importance des calculs à effectuer pour connaître un générateur infinitésimal du groupe de symétrie d'une e.d.p. Heureusement, il existe un logiciel informatique [CHW] qui permet de trouver le système d'équations pour $\xi^i(x, u)$ et $\eta(x, u)$ et résoudre un grand nombre de tels systèmes.

Remarque: on peut encore généraliser la méthode à n variables indépendantes et m variables dépendantes.

c/*Exemple.*

Pour voir comment fonctionne la méthode décrite ci-dessus, nous l'appliquons à l'équation linéaire de Schrödinger. Pour cette équation, les calculs sont simplifiés par le théorème suivant:

Théorème(Ovsiannikov-Bluman), [BLU]

Supposons que l'e.d.p. d'ordre $p \geq 2$

$$u_{i_1 i_2 \ldots i_l} = F(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(p)}),$$

où $F(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(p)})$ *ne dépend pas de* $u_{i_1 i_2 \ldots i_l}$, *admet un groupe de symétrie dont le générateur infinitésimal est*

$$X = \xi^i(x,u)\partial_{x^i} + \eta(x,u)\partial_u.$$

Alors

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n;$$
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0.$$

D'après la proposition du (b/), une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation de Schrödinger libre dans le plan,

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}(\partial_{xx} + \partial_{yy})u = 0, \tag{4.74}$$

admette un groupe de symétrie est

$$i\eta_0 + \frac{1}{2}(\eta_{11} + \eta_{22}) = 0, \tag{4.75}$$

chaque fois que (4.74) est vérifiée. D'après le théorème précédent, un générateur de symétrie de (4.74) est de la forme

$$X = \xi^0(t,x,y)\partial_t + \xi^1(t,x,y)\partial_x + \xi^2(t,x,y)\partial_y + \big\{f(t,x,y)u + g(t,x,y)\big\}\partial_u.$$

Ici, η_0, η_{11} et η_{22} sont des fonctions donnés, suivant (4.71), par ([2]):

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= g_t + f_t u + (f - \xi^0_t)u_t - \xi^1_t u_x - \xi^2_t u_y,\\
\eta_{11} &= g_{xx} + f_{xx}u - \xi^0_{xx}u_t + (2f_x - \xi^1_{xx})u_x - \xi^2_{xx}u_y\\
&\quad + (f - 2\xi^1_x)u_{xx} - 2\xi^2_x u_{xy} - 2\xi^0_x u_{tx},\\
\eta_{22} &= g_{yy} + f_{yy}u - \xi^0_{yy}u_t - \xi^1_{yy}u_x + (2f_y - \xi^2_{yy})u_y\\
&\quad + (f - 2\xi^2_y)u_{yy} - 2\xi^1_y u_{xy} - 2\xi^0_y u_{ty}.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

([2]) Les indices signifient des dérivées partielles.

En substituant ces relations dans (4.75) et en tenant compte de (4.74), on obtient le système d'équations suivant:

$$
\begin{aligned}
&\xi^0_x = \xi^0_y = 0,\\
&\xi^1_y + \xi^2_x = 0,\\
&\xi^0_t = 2\xi^1_x,\\
&\xi^0_t = 2\xi^2_y,\\
&f_x = i\xi^1_t,\\
&f_y = i\xi^2_t,\\
&if_t + \frac{1}{2}(f_{xx} + f_{yy}) = 0,\\
&ig_t + \frac{1}{2}(g_{xx} + g_{yy}) = 0,
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

que l'on résoud aisément:

$$
\begin{aligned}
&\xi^0 = a_1t^2 + 2a_2t + a_3,\\
&\xi^1 = (a_1t + a_2)x + a_4y + a_5t + a_6,\\
&\xi^2 = a_4x + (a_1t + a_2)y + a_7t + a_8,\\
&f = i\Big(\frac{a_1}{2}(x^2 + y^2) + a_5x + a_7y\Big) - \frac{a_1}{2}t + a_9.
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

où a_k, $k = 1, .., 8$, sont des paramètres réels et a_9 est une constante d'intégration complexe. g est une solution quelconque de l'équation de Schrödinger linéaire.

Les générateurs infinitésimaux des transformations, symétries de l'équation (4.74), sont alors:

$$\partial_t, \qquad \partial_x, \qquad \partial_y, \qquad \text{pour les translations du temps et du plan;} \tag{4.79}$$

$$y\partial_x - x\partial_y, \qquad \text{pour les rotations du plan;} \tag{4.80}$$

$$t\partial_x + ixu\partial_u, \qquad t\partial_y + iyu\partial_u, \qquad \text{pour les changements de repères galiléens (boost).} \tag{4.81}$$

Ces 6 générateurs engendrent, bien entendu, le groupe de Galilée du plan.

On trouve aussi deux autres générateurs,

$$x\partial_x + y\partial_y + 2t\partial_t, \qquad \text{pour les dilatations;} \tag{4.82}$$

$$tx\partial_x + ty\partial_y + t^2\partial_t + \frac{1}{2}[-t + i(x^2 + y^2)]u\partial_u, \qquad \text{pour les expansions.}$$

Ces opérateurs engendrent, avec le groupe Galilée, le groupe de Schrödinger.

On obtient aussi trois autres générateurs de symétries, notamment $g(t,x,y)\partial_u$ (avec $g(t,x,y)$ solution de l'équation de Schrödinger libre, (4.74), ainsi que $u\partial_u$ et $iu\partial_u$. Ici,

– $g(t,x,y)\partial_u$ est le générateur du groupe

$$\tilde{t} = t,\ \tilde{x} = x,\ \tilde{y} = y,$$

$$\tilde{u}(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y}) = u(t,x,y) + \epsilon g(t,x,y),$$

qui est de dimension infinie. Ce groupe est une symétrie triviale de tout système linéaire, dès que la fonction $g(t,x,y)$ vérifie ce même système [BLU].

– $u\partial_u$ engendre le groupe des transformations linéaires $u(t,x,y) \to a \cdot u(t,x,y)$, où $a \neq 0$ est un paramètre réel.

– La constante du mouvement associée au générateur $iu\partial_u$ se calcule directement à partir de l'expression (4.11) et de la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\Big(u_t\bar{u} - \bar{u}_t u\Big) - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}u|^2.$$

Elle est alors donnée par

$$\int |u|^2\, dxdy,$$

de sorte qu'elle s'interprète comme *la masse* ou *le nombre de particules.*

Ce générateur commute avec ceux du groupe de Galilée. Il est aussi obtenu en commutant les boosts avec les translations. En rajoutant ce générateur au groupe de Galilée, on retrouve l'extension centrale de ce dernier, dûe à Bargmann.

En calculant le commutateur des boosts, on trouve zéro. Notre méthode ne permet donc pas d'obtenir l'extension "exotique" du groupe de Galilée planaire [LL].

5. INTEGRABILITE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.

5.1. *Méthode de diffusion inverse et conjecture de Painlevé (P1).*

Nous présentons brièvement les équations à solitons dans le seul but d'introduire les deux conjectures de Painlevé. Pour l'étude de ces équations, on pourra se référer à [BA], [DRA], [HOP].

Les années 1960-70 ont vu naître, en physique mathématique, un grand intérêt pour des méthodes de résolution de certaines équations aux dérivées partielles: méthode de diffusion inverse, méthode d'Hirota, transformation de Bäcklund, paire de Lax,... Par simplicité, nous nous restreignons à la dimension $(1+1)$.

Parmi les plus connues de ces équations on trouve l'équation de Kortewegs-de-Vries (K.d.V.),

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

l'équation de Schrödinger non linéaire,

$$iu_t + u_{xx} - |u|^2 u = 0,$$

l'équation de sine-Gordon,

$$u_{xt} = \sin u.$$

Dans tous ces exemples, l'équation d'évolution peut s'écrire sous la forme

$$L_t = [B, L] \equiv BL - LB, \tag{5.1}$$

où L et B sont des opérateurs linéaires en x uniquement qui dépendent de la solution $u(x,t)$ et qui opèrent sur un espace de Hilbert (muni du produit scalaire (,)). L est supposé auto-adjoint ($(\phi, L\psi) = (L\phi, \psi)$). L et B constituent une paire de Lax. Quand une équation peut s'ecrire sous la forme (5.1), c'est-à-dire admet une paire de Lax, on peut construire une solution analytique du type soliton par la méthode de diffusion inverse (Inverse Scattering Method) [DRA].

Le problème de la construction de solutions solitoniques revient alors à chercher des paires de Lax. Comment savoir si une équation admet des paires de Lax? Il n'existe pas de méthode systématique pour savoir si un système est complètement intégrable, c'est-à-dire admet une paire de Lax: ces dernières sont, le plus souvent, déterminées de manière empirique. Cependant, il existe des conjectures faisant office de critères d'intégrabilité.

Avant de présenter des conditions "nécessaires" ou "suffisantes" d'intégrabilité, rappelons quelques définitions sur les solutions d'équations différentielles ordinaires dans **C**.

Les solutions d'équations différentielles ordinaires peuvent avoir des singularités mobiles ou fixes suivant que ces dernières dépendent ou non de constantes d'intégration; par exemple l'équation

$$\frac{dw}{dz} + w^2 = 0,$$

admet la solution générale

$$w(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

où z_0 est un nombre complexe arbitraire; z_0 est un pôle dit mobile de la solution, alors que l'équation

$$z\frac{dw}{dz} + w = 0$$

admet la solution générale

$$w(z) = \frac{c}{z}$$

pour laquelle 0 est un pôle dit fixe.

Rappelons, entre autres, que les singularités des solutions d'une équation différentielle ordinaire linéaire sont toujours fixes.

Ablowitz, Ramani et Segur ont observé que les équations différentielles ordinaires dans le plan complexe, obtenues par réduction d'équations connues comme étant intégrables, étaient du type de celles étudiées par Painlevé, c'est-à-dire que les seules singularités mobiles admises par les solutions sont des pôles [DRA].

Par exemple [MO], considérons l'équation généralisé de K.d.V

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0, \tag{5.2}$$

où p est un entier naturel. Cette équation admet

$$G_v : (x, t, u) \to (x + v\epsilon, t + \epsilon, u), \qquad \epsilon \in \mathbf{R},$$

comme groupe de symétrie (v représente la vitesse de l'onde). Les solutions invariantes par G_v sont de la forme

$$u(x, t) = f(\xi), \qquad \xi \equiv x - vt,$$

c'est-à-dire sont des ondes progressives. Pour de telles solutions, l'équation (5.2) prend la forme d'une équation différentielle ordinaire, à savoir

$$f'''(\xi) + f'(\xi) f(\xi)^p - v f'(\xi) = 0.$$

En intégrant, on obtient

$$f'' = -\frac{1}{p+1} f^{p+1} + vf + \frac{1}{2} d;$$

puis, multipliant par f' et intégrant une seconde fois, on trouve:

$$(f')^2 = -\frac{2}{(p+1)(p+2)} f^{p+2} + vf^2 + df + e, \tag{5.3}$$

où d et e sont des constantes réelles. D'après le théorème suivant [MO],[HI]:

Considérons l'équation

$$(f')^2 = R(f),$$

où R est une fonction rationnelle de f. Alors toutes les solutions de cette équation sont méromorphes dans C si et seulement si R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4;

L'équation (5.3) est du type de Painlevé pour $p = 0, 1, 2$. $p = 0$ correspond au cas linéaire, $p = 1$ donne l'équation de K.d.V (à un coefficient près) et $p = 2$ donne l'équation de K.d.V. modifié; toutes ces équations sont complètement intégrables.

Ablowitz, Ramani et Segur ont alors conjecturé [ARS]:

Si un système d'équations aux dérivées partielles est complètement intégrable, alors tout système d'équations différentielles obtenu par une réduction exacte de ce système est du type de Painlevé.

McLeod et Olver ont précisé cette conjecture [MO]:

Si un système d'équations aux dérivées partielles, (I), est complètement intégrable et si G est un groupe de symétrie de ce système, alors le système d'équations différentielles ordinaires, réduction de (I) et vérifié par les solutions G-invariantes, est du type de Painlevé.

Des démonstrations de ces conjectures, sous certaines hypothèses, ont été proposées [MO]; cependant, elles n'ont jamais été démontrées dans le cas le plus général.

5.2. *Une autre conjecture de Painlevé (P2).* [WTC], [W1]

Une faiblesse du précédent test d'intégrabilité est, qu'en général, les e.d.p n'admettent pas de symétrie et, par conséquent, ne peuvent être réduites à des équations différentielles [WA].

Une idée, pour lever cet obstacle, a été d'étendre la définition de la propriété de Painlevé directement aux e.d.p, plutôt que de réduire l'e.d.p. à une équation différentielle ordinaire: c'est la conjecture de Painlevé proposée par Weiss, Tabor et Carnevale [TA], [WTC], [W1].

Comment exprimer qu'une e.d.p. a la propriété de Painlevé ? Comme pour une équation différentielle ordinaire, il faut considérer une solution $u(x_1, \ldots, x_n)$ comme une fonction de plusieurs variables complexes, $u(z_1, \ldots, z_n)$, et regarder si ses seules singularités mobiles sont des "pôles".

Cependant, en général, les singularités d'une fonction de plusieurs variables complexes ne peuvent être isolées: si $f \equiv f(z_1, \ldots, z_n)$ est une fonction méromorphe de n variables complexes, les singularités de f sont des variétés de dimension $2n - 2$. Ces variétés, que nous appelerons variétés singulières, sont déterminées par des équations de la forme

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = 0, \tag{5.4}$$

où Φ est une fonction analytique de $(z_1, \ldots, z_n)$ dans un voisinage de la variété.

Définition.

Une équation aux dérivées partielles en $(x_1, \ldots, x_n)$ a la propriété de Painlevé si toutes ses solutions, considérées comme fonctions de plusieurs variables complexes, peuvent s'écrire, au voisinage d'une variété singulière mobile Φ, sous la forme d'une série de Laurent "généralisée"; elles s'écrivent alors

$$u(z_1, \ldots, z_n) = \Phi^\alpha \sum_{j=0}^{+\infty} u_j \Phi^j, \tag{5.5}$$

où les $u_j(z_1, \ldots, z_n)$ sont des fonctions analytiques de $(z_1, \ldots, z_n)$ dans un voisinage de la variété (5.4), et α est un entier négatif.

Conjecture de Painlevé (P2). [WTC], [W1]

Si une équation aux dérivées partielles a la propriété de Painlevé alors elle est complètement intégrable, c'est-à-dire peut être résolue par une méthode de diffusion inverse.

La réciproque est fausse: il existe des équations complètement intégrables mais qui ne passent pas le test de Painlevé, par exemple l'équation de Harry Dym [W2].

En substituant (5.5) dans l'e.d.p. étudiée, on obtient les valeurs possibles de α et des relations de récurrence pour les u_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Il existe des valeurs de j, appelées "resonances" pour lesquelles la relation de récurrence donnant u_j n'est pas définie et où u_j est arbitraire; le nombre de termes arbitraires, y compris la variété Φ, dans la série (5.5) est égal à l'ordre de l'e.d.p. Si à la résonance j, u_j dépend de Φ et des u_k, $(k = 0, \ldots, j-1)$, alors l'e.d.p considérée ne passe pas le test de Painlevé. De telles resonances déterminent néanmoins des conditions qui réduisent notre e.d.p en une équation complètement intégrable.

Si l'e.d.p. a la propriété de Painlevé, on peut obtenir des transformations dites de Bäcklund, c'est-à-dire une relation qui transforme une solution en une autre solution par la méthode de la variété singulière: elle consiste à tronquer la série (5.5) après le terme constant u_0 [WTC], [W1]. On peut aussi déterminer des paires de Lax.

Nous allons voir sur un exemple, en l'occurence l'équation de Burger connue pour son intégrabilité complète, comment marche ce test de Painlevé (P2).

Soit l'équation de Burger

$$u_t + u u_x = u_{xx}. \tag{5.6}$$

Supposons que

$$u = \Phi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} u_j \Phi^j, \tag{5.7}$$

où

$$\Phi = \Phi(x,t) \qquad \text{et} \quad u_j = u_j(x,t)$$

sont des fonctions analytiques de (x,t) au voisinage de la variété

$$M = \{(x,t)\Big|\Phi(x,t) = 0\}.$$

Pour trouver les valeurs de α, on analyse les termes dominants: en posant $u \sim u_0\Phi^\alpha$ au voisinage de M et en égalant les termes d'ordre dominant dans l'équation (5.6), on obtient

$$\alpha = -1, \qquad u_0 = -2\Phi_x. \tag{5.8}$$

En substituant l'égalité (5.7) avec $\alpha = -1$ dans (5.6), on obtient les relations de récurrence suivantes:

$$\begin{aligned} &u_{j-2},t + (j-2)u_{j-1}\Phi_t + \sum_{k=0}^{j} u_{j-k}[u_{k-1,x} + (k-1)u_k\Phi_x] = \\ &u_{j-2,xx} + 2(j-2)u_{m-1,x}\Phi_x + (j-2)u_{j-1}\Phi_{xx} + (j-2)(j-1)u_j\Phi_x^2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

pour $j = 0, \ldots$. On notera que la relation de récurrence n'est pas définie pour $j = 2$. Cette valeur de j est une "résonance" et devrait correspondre à une fonction arbitraire de (x,t) dans le développement (5.7). La valeur $j = 2$ devrait entraîner u_2 arbitraire et une condition de compatibilité ($F_2 = 0$).

On obtient alors, en remplaçant dans (5.9) j par ses valeurs,

$$\begin{aligned} &\text{pour} \quad j = 0, \qquad u_0 = -2\Phi_x, \\ &\text{pour} \quad j = 1, \qquad \Phi_t + u_1\Phi_x = \Phi_{xx}, \\ &\text{pour} \quad j = 2, \qquad \partial_x(\Phi_t + u_1\Phi_x - \Phi_{xx}) = 0 \qquad (F_2 = 0). \end{aligned} \tag{5.10}$$

La condition de compatibilité précédente, $F_2 = 0$, est identiquement satisfaite et u_2 est bien arbitraire. On peut donc dire que l'équation de Burger possède la propriété de Painlevé.

Déterminons une transformation de Bäcklund pour l'équation de Burger; si une solution u de cette équation se met sous la forme (5.7), on a vu que u_2 est arbitraire; posons alors

$$u_2 = 0,$$

et supposons que u_1 vérifie (5.6), c'est-à dire

$$u_{1t} + u_1u_{1x} = u_{1xx};$$

en calculant successivement $u_j, j = 3, \cdots$ à partir de (5.9) et des deux égalités précédentes, on obtient

$$u_j = 0 \qquad \text{pour} \quad j \geq 2,$$

La solution u de l'équation de Burger devient alors

$$u = \frac{u_0}{\Phi} + u_1 = -2\frac{\Phi_x}{\Phi} + u_1, \tag{5.11}$$

où Φ vérifie, d'après (5.10),

$$\Phi_t + u_1\Phi_x = \Phi_{xx}. \tag{5.12}$$

On a donc le résultat suivant:

Si u_1 est une solution de l'équation (5.6) alors u donnée par (5.11) est aussi une solution de (5.6) pourvu que Φ vérifie (5.12).

Les relations (5.11), (5.12) constituent une transformation de Bäcklund de l'équation de Burger.

Remarque importante. [TA], [W1]

Une propriété importante et utile de la fonction Φ est qu'elle a une différentielle non nulle sur la variété singulière. Par exemple, si Φ est une fonction de deux variables x et t, la variété singulière est définie par

$$\Phi(t, x) = 0, \tag{5.13}$$

et au voisinage d'une telle surface, on peut écrire, d'après le théorème des fonctions implicites,

$$\Phi(t, x) = x - \psi(t) \tag{5.14}$$

où

$$\Phi(t, \psi(t)) = 0, \tag{5.15}$$

pourvu que $\Phi_x(t, x) \neq 0$ sur (5.13).

De même, on pourrait écrire, dans un voisinage de (5.13), $\Phi(t, x) = t - \theta(x)$ avec $\Phi(\theta(x), x) = 0$ si nous avions $\Phi_t(t, x) \neq 0$ sur (5.13).

Avec de telles expressions de Φ, par exemple $\Phi(t, x) = x - \psi(t)$, les calculs deviennent plus simples dans l'analyse de Painlevé; en effet, les coefficients $u_i(t, x)$ dans la série de Laurent généralisée (5.5) se réduisent à des fonctions de t uniquement. Cependant, on perd certaines informations comme les transformations de Bäcklund associées.

5.3. *Application: l'équation de Schrödinger non linéaire modifiée.*

Dans [AGJPS], Aglietti, Griguolo, Jackiw, Pi et Seminara s'intéressent aux solutions solitoniques de l'équation non linéaire de Schrödinger modifiée :

$$i\partial_t\psi(t,x) + \frac{1}{2m}\partial_x^2\psi(t,x) + \lambda j(t,x)\psi(t,x) = 0, \tag{5.16}$$

où la non–linéarité est donnée par la densité de courant

$$j(t,x) = \frac{1}{m} Im(\psi^*\partial_x\psi), \tag{5.17}$$

plutôt que par l'interaction cubique habituelle, $F(\psi^*\psi)\psi,\ F = const.$

L'équation de Schrödinger modifiée (5.16) a été montrée non-intégrable [ClaCo]. Aglietti et al. ont trouvé, cependant, des solutions solitoniques particulières. En effet, en écrivant $\psi = \varrho^{1/2}e^{i\theta}$, le courant devient

$$j = \frac{1}{m}\varrho(\partial_x\theta), \tag{5.18}$$

si bien que (5.16) peut s'écrire

$$i\partial_t\psi(t,x) + \frac{1}{2m}\partial_x^2\psi(t,x) + F(t,x)\varrho(t,x)\psi(t,x) = 0 \tag{5.19}$$

avec $F(t,x) = \dfrac{\lambda}{m}\partial_x\theta$. Pour

$$\theta(x,t) = kx - \omega t \tag{5.20}$$

c. à. d. pour

$$F = \frac{\lambda k}{m} \equiv \lambda v, \tag{5.21}$$

Aglietti et al. trouvent une solution solitonique, pourvu que $v > 0$. En effet, si $F = const.$, (5.19) devient l'équation non linéaire de Schrödinger, qui est complètement intégrable. La solution cohérente avec l'Ansatz (5.20) est le soliton bien connu [AGJPS] :

$$\psi_s = \pm e^{-i(\omega t - kx)}\sqrt{\frac{1}{\lambda m v}}\frac{\alpha}{\cosh\alpha(x - vt)}, \tag{5.22}$$

où $\alpha^2 = m^2v^2(1 - 2\omega/kv)$.

Il est naturel de se demander si la solution particulière trouvée par Aglietti et al. peut être généralisée. En clair, la phase θ dans (5.19) peut-elle avoir une forme plus compliquée

que (5.20) ? Ceci revient à chercher des coefficients $F(t,x)$ non triviaux pour avoir (5.19) intégrable.

Pour répondre à la question, nous avons effectué l'analyse de Painlevé de (5.19). Nous utilisons la "Remarque importante" précédente pour montrer le résultat :

Théorème : *L'équation aux dérivées partielles*,

$$iu_t + u_{xx} + F(t,x)|u|^2 u = 0, \tag{5.23}$$

passe le test de Painlevé si et seulement si $F(t,x) = const.$

Cette proposition est à comparer avec le résultat suivant [CLL]: l'équation

$$iu_t + u_{xx} + F(|u|^2)u = 0$$

peut être résolue par la méthode de diffusion inverse si et seulement si $F(\xi) = \alpha\xi$.

Preuve.

Comme d'habitude (cf. [W3]), on complexifie le problème, en considérant le système constitué de (5.23) et de sa conjuguée complexe ($v = u^*$):

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} + Fu^2 v = 0, \\ -iv_t + v_{xx} + Fv^2 u = 0. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Ce système couplé passera le test de Painlevé si u et v admettent les séries de Laurent généralisées

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \xi^{n-p}, \qquad v = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \xi^{n-q},$$

($u_n \equiv u_n(x,t)$, $v_n \equiv v_n(x,t)$ et $\xi \equiv \xi(x,t)$) au voisinage de la variété singulière $\xi(x,t) = 0$, $\xi_x \neq 0$, avec un nombre suffisant de coefficients arbitraires. D'après la remarque précédente, on peut écrire dans un voisinage de la variété singulière

$$\xi = x + \psi(t). \tag{5.25}$$

u_n et v_n deviennent alors des fonctions de t uniquement.

a. *Analyse des termes dominants.*

En intégrant dans (5.24) les termes dominants, $u \sim u_0 \xi^{-p}$, $v \sim v_0 \xi^{-q}$, et en tenant compte de (5.25), on obtient:

$$\begin{aligned} p = q = 1, \\ Fu_0 v_0 = -2. \end{aligned} \tag{5.26}$$

De cette relation, on déduit que F ne dépend que de t. Les séries u et v s'écrivent maintenant

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \xi^{n-1}, \qquad v = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \xi^{n-1}, \tag{5.27}$$

avec $u_n \equiv u_n(t)$ et $v_n \equiv v_n(t)$.

b. Quand on remplace, dans (5.24), u et v par leur expression (5.27), les termes en ξ^k, $k \geq -3$ sont donnés par:

$$\begin{aligned} &i\Big(u_{k+1,t} + (k+1)u_{k+2}\xi_t\Big) + (k+2)(k+1)u_{k+3} + F\Big(\sum_{i+j+l=k+3} u_i u_j v_l\Big) = 0, \\ &i\Big(v_{k+1,t} + (k+1)v_{k+2}\xi_t\Big) + (k+2)(k+1)v_{k+3} + F\Big(\sum_{i+j+l=k+3} v_i v_j u_l\Big) = 0. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Remarquons qu'on retrouve la relation (5.26) pour $k = -3$.

Les coefficients u_n, v_n des séries (5.27) sont alors donnés par le système S_n ($k = n-3$):

$$\begin{aligned} &[(n-1)(n-2) - 4]u_n + F u_0^2 v_n = A_n, \\ &F v_0^2 u_n + [(n-1)(n-2) - 4]v_n = B_n, \end{aligned} \tag{5.29}$$

où A_n et B_n ne contiennent que des termes u_i, v_j avec $i, j < n$. Le déterminant du système est

$$\det S_n = n(n-4)(n-3)(n+1).$$

Alors (5.24) passera le test de Painlevé si pour $n = 0, 3, 4$, l'un des coefficients u_n, v_n est arbitraire. Pour $n = 0$, la relation (5.26) montre bien que l'un des coefficients u_0, v_0 est arbitraire. Pour $n = 1$ et $n = 2$, le système (5.28–5.29) est aisément résolu; on a

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{i}{2} u_0 \xi_t, \\ v_1 &= \frac{i}{2} v_0 \xi_t; \end{aligned} \tag{5.30}$$

et

$$\begin{aligned} 6v_0 u_2 &= i v_{0,t} u_0 + 2i u_{0,t} v_0 - \frac{1}{2} u_0 v_0 (\xi_t)^2, \\ 6u_0 v_2 &= -i u_{0,t} v_0 - 2i v_{0,t} u_0 - \frac{1}{2} u_0 v_0 (\xi_t)^2. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Le cas $n = 3$ doit être une résonance; en tenant compte de (5.26), le système (5.29) devient

$$\begin{aligned} -2v_0 u_3 - 2u_0 v_3 &= A_3 v_0, \\ -2v_0 u_3 - 2u_0 v_3 &= B_3 u_0, \end{aligned}$$

d'où l'égalité $A_3 v_0 = B_3 u_0$. On vérifie que cette égalité est indentiquement satisfaite à partir des expressions de A_3 et B_3. Les calculs ont été faits avec le logiciel "Mathematica"; on trouve:

$$2FA_3 = u_0(F_t\xi_t - F\xi_{tt}), \qquad u_0F^2B_3 = F\xi_{tt} - F_t\xi_t.$$

Le cas $n = 4$ doit aussi être une résonance; comme dans ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} 2v_0u_4 - 2u_0v_4 &= A_4v_0, \\ -2v_0u_4 - 2u_0v_4 &= B_4u_0, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$v_0A_4 = -u_0B_4. \tag{5.32}$$

En tenant compte des expressions de v_0, u_1, v_1, u_2, v_2 en fonction de u_0 et F, et de u_3, v_3, on obtient avec "Mathematica"

$$\begin{aligned} 6u_0F^2A_4 =& \Big(- F^2u_{0,t}^2 - 2iu_0^2F^2\xi_t\xi_{tt} + u_0F^2u_{0,tt} + iu_0^2F\xi_t^2F_t - u_0Fu_{0,t}F_t \\ & + 2u_0F_t^2 - u_0^2FF_{tt}\Big), \\ 3u_0^3F^3B_4 =& \Big(- F^2u_{0,t}^2 - 2iu_0^2F^2\xi_t\xi_{tt} + u_0F^2u_{0,tt} + iu_0^2F\xi_t^2F_t - u_0Fu_{0,t}F_t \\ & - 4u_0F_t^2 + 2u_0^2FF_{tt}\Big). \end{aligned}$$

On en déduit, en tenant compte de (5.32), $2F_t^2 - FF_{tt} = 0$ ou encore

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{1}{F}\Big) = 0.$$

On a alors $F(x,t) = \dfrac{1}{at+b}$ et pour éviter toute singularité de F (définie sur $\mathbf{R}$), $a = 0$. F est donc une constante si et seulement si (5.23) vérifie le test de Painlevé.

C.Q.F.D.

Nous mentionnons en conclusion qu'une généralisation à des équations à coefficients non-constants peut être considérée et liée aux propriétét de l'espace-temps non relativiste [HYIJTP].

6. ELECTROMAGNETISME NON RELATIVISTE.

Dans une grande partie de cette thèse, nous nous intéressons à des modèles non relativistes, invariants par changements de repères galiléens. Ces modèles sont sensés décrire des interactions entre un champ électromagnétique et un champ de matière. Pour

ces raisons, les équations décrivant le champ électromagnétique ne peuvent être celles de Maxwell: ses équations sont relativistes, invariantes par les transformations de Lorentz. Pour avoir des équations non relativistes, nous prendrons celles de Le Bellac et Lévy Leblond (la version magnétique) décrites par la théorie ci-dessous [LLB].

Les équations de Maxwell,

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \\ &\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}, \\ &\vec{\nabla}.\vec{B} = 0, \\ &\epsilon_0 \vec{\nabla}.\vec{E} = \varrho, \end{aligned} \tag{6.1}$$

où $(\vec{E}, \vec{B})$ est le champ électromagnétique créé par la charge ϱ et le courant $\vec{J}$ et $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ (ϵ_0: permitivité du vide; μ_0: perméabilité du vide; c: vitesse de la lumière), admettent deux limites non relativistes.

1. Limite magnétique.

Si $c|\varrho| \ll |\vec{J}|$, ce qui équivaut à $|\vec{E}| \ll c|\vec{B}|$, une variation du champ électrique n'induit pas de champ magnétique et les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \\ &\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \\ &\vec{\nabla}.\vec{B} = 0, \\ &\epsilon_0 \vec{\nabla}.\vec{E} = \varrho. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Le champ électromagnétique dérive alors d'un potentiel scalaire, A_0, et d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ selon:

$$\begin{aligned} &\vec{E} = \vec{\nabla} A_0 - \partial_t \vec{A}, \\ &\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Lors d'un changement de référentiel galiléen

$$\begin{aligned} &\tilde{t} = t, \\ &\widetilde{\vec{x}} = \vec{x} - t\vec{v}, \end{aligned} \tag{6.4}$$

les champs se transforment suivant:

$$\begin{aligned} &\widetilde{A_0} = A_0 + \vec{v}.\vec{A}, \\ &\widetilde{\vec{A}} = \vec{A}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\vec{E}} &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \\ \widetilde{\vec{B}} &= \vec{B}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

La charge électrique et le courant se transforment selon:

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho} &= \varrho - \epsilon_0 \mu_0 \vec{v}.\vec{J}, \\ \widetilde{\vec{J}} &= \vec{J}. \end{aligned}$$

Cette limite magnétique s'applique aux situations physiques où la charge électrique totale est très faible; cette faiblesse peut être due à la présence de charges positives et négatives qui se compensent. Dans ce cas, les phénomènes magnétiques dominent.

2. Limite électrique.

Si, cette fois, $c|\varrho| \gg |\vec{J}|$, ce qui équivaut à $|\vec{E}| \gg c|\vec{B}|$, une variation du champ magnétique n'induit pas de champ électrique et les équations de Maxwell se réduisent à :

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \\ &\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}, \\ &\vec{\nabla}.\vec{B} = 0, \\ &\epsilon_0 \vec{\nabla}.\vec{E} = \varrho. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Le champ électromagnétique dérive encore d'un potentiel scalaire, A_0, et d'un potentiel vecteur $\vec{A}$, mais cette fois, selon:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{\nabla} A_0, \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Lors d'un changement de référentiel galiléen

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t, \\ \widetilde{\vec{x}} &= \vec{x} - t\vec{v}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

les champs se transforment suivant:

$$\begin{aligned} \widetilde{A_0} &= A_0, \\ \widetilde{\vec{A}} &= \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 A_0 \vec{v}, \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\vec{E}} &= \vec{E}, \\ \widetilde{\vec{B}} &= \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \vec{v} \times \vec{E}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

La charge électrique et le courant se transforment selon:

$$\tilde{\varrho} = \varrho,$$
$$\widetilde{\vec{J}} = \vec{J} - \varrho\vec{v}.$$

Cette limite peut s'appliquer si toutes les charges électriques sont du même signe; dans ce cas en effet on peut avoir $c|\varrho| \gg |\vec{J}|$; les phénomènes électriques dominent.

Si on veut une théorie électromagnétique complète non relativiste, la force de Lorentz

$$\vec{F} = \int \left\{ \varrho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) + \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right\} d^3\vec{r}$$

doit rester invariante par changement de référentiel galiléen. Pour la limite magnétique, ceci est vrai si

$$\int \Big(\varrho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \Big) d^3\vec{r} = \vec{0};$$

le champ électrique, qui peut ne pas être nul, ne produit pas d'effets observables.

De même pour la limite électrique

$$\int \Big(\vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \Big) d^3\vec{r} = \vec{0};$$

le champ magnétique ne produit pas d'effets observables.

Remarques:

1. Quand on s'intéresse à des théories de jauge, il est préférable de travailler avec la limite magnétique: les champs magnétique et électrique sont invariants par transformation de jauge, contrairement au champ électrique dans la limite électrique.

2. La relation $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ permet de voir que les équations de Maxwell ne peuvent admettre de limite non relativiste ($c \to \infty$) tant que ϵ_0 et μ_0 restent finis tous les deux. La possibilité de garder l'une des deux constantes finies implique l'existence des deux limites galiléennes: la limite magnétique est obtenue en gardant μ_0 et en éliminant $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ quand $c \to \infty$; pour obtenir la limite électrique, on réécrit les équations de Maxwell avec $\widetilde{\vec{E}} = \vec{E}$, $\widetilde{B} = c^2 B$, $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$ et on fait tendre c vers l'infini en gardant ϵ_0 finie.

II. VORTEX NON TOPOLOGIQUES;

LE MODELE DE JACKIW–PI.

Dans cette partie, nous présentons le modèle abélien et non relativiste de Jackiw et Pi, modèle qui décrit des particules portant un flux magnétique et un champ électrique. Dans le cas statique et pour une valeur particulière de la constante de couplage de Chern-Simons κ, toutes les solutions de ce modèle sont auto-duales et les équations du champ se réduisent à l'équation de Liouville. Nous retrouvons ces résultats à partir de la notion d'intégrabilité d'équations aux dérivées partielles développée par Weiss, Tabor et Carnevale. Nous montrons aussi que les solutions décrivant des vortex, suffisamment localisés dans le plan, dépendent d'une fonction complexe rationnelle. On établit ainsi qu'une solution représentant N vortex séparés dépend de $4N$ paramètres au plus.

7. LE MODELE DE JACKIW ET PI (Chern-Simons pur). [JP1], [JP2], [DUN], [DH-Rev]

Le modèle est donné par la densité de lagrangien:

$$\mathcal{L} = i(\psi^*(D_t\psi) - \psi(D_t\psi)^*) + \kappa(BA_0 + E_2A_1 - E_1A_2) - \sum_{k=1}^{2}(D_k\psi)(D_k\psi)^* + g|\psi|^4 \tag{7.1}$$

où $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, $\mu = 0,1,2$, sont les dérivées covariantes. (B, E^k) est le champ électromagnétique qui dérive du potentiel de jauge (A_0, A_k), $k = 1,2$, selon

$$\begin{aligned} E_k &= \partial_k A_0 - \partial_t A_k, \\ B &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Les équations du mouvement sont:

$$\begin{aligned} &(iD_t + \frac{1}{2}D_k^2 + g\varrho)\psi = 0, \\ &J_k^s = -\kappa\epsilon_{kl}E_l, \qquad k = 1,2 \\ &\kappa B = -|\psi|^2. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Ces équations rendent compte de l'électrodynamique de Chern-Simons avec

$$\rho \equiv |\psi|^2, \qquad J_k \equiv J_k^s = \frac{1}{2i}\Big((D_k\psi)\psi^* - \psi(D_k\psi)^*\Big); \tag{7.4}$$

en effet l'équation de conservation de la charge correspond exactement à la partie imaginaire de l'équation non linéaire de Schrödinger. $\kappa B = -\varrho$ est une contrainte, appelée contrainte de Chern-Simons; elle est obtenue à partir de la divergence de $\vec{J}$ calculée avec la seconde équation de (7.3) puis en utilisant la conservation de la charge.

Le modèle est invariant par transformation de jauge,

$$\begin{aligned} &\psi(\vec{x},t) \to \psi(\vec{x},t)e^{i\omega(\vec{x},t)}, \\ &A_\mu(\vec{x},t) \to A_\mu(\vec{x},t) + \partial_\mu\omega; \end{aligned} \tag{7.5}$$

l'unique terme non invariant du lagrangien est le terme de Chern-Simons,

$$C.S \equiv \kappa(BA_0 + E_2A_1 - E_1A_2);$$

celui-ci devient

$$C.S - \omega\Big(\underbrace{\partial_t B + \partial_x E_2 - \partial_y E_1}_{0}\Big) + \epsilon^{\alpha\mu\nu}\partial_\alpha(F_{\mu\nu}\omega)$$

le nouveau terme étant un terme de surface.

8. SYMETRIES ET CONSTANTES DU MOUVEMENT.

La physique de la matière condensée étant non relativiste, il est souhaitable que le modèle (7.1) soit invariant par le groupe de Galilée. Jackiw et Pi ont montré [JP1], [JP2] qu'il est invariant par le groupe de Schrödinger. Lévi, Vinet et Winternitz ont montré qu'il constituait le groupe maximal de symétrie [LVW]:

Théorème[LVW]

Le générateur infinitésimal de tout groupe de symétrie du système (7.3) est une combinaison linéaire à coefficients constants des vecteurs suivants:

$$\begin{aligned}
&1.\quad P_0 = \partial_t \\
&2.\quad P_1 = \partial_x \\
&3.\quad P_2 = \partial_y \\
&4.\quad R = y\partial_x - x\partial_y + A_2\partial_{A_1} - A_1\partial_{A_2} \\
&5.\quad D = x\partial_x + y\partial_y + 2t\partial_t - f\partial_f - 2A_0\partial_{A_0} - A_1\partial_{A_1} - A_2\partial_{A^2} \\
&6.\quad B_1 = t\partial_x + A_1\partial_{A_0} - \partial_{A_1} \\
&7.\quad B_2 = t\partial_y + A_2\partial_{A_0} - \partial_{A_2} \\
&8.\quad C = t(x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t + f\partial_f) \\
&\qquad + (xA_1 + yA_2 - 2tA_0)\partial_{A_0} - (tA_1 + x)\partial_{A_1} - (tA_2 + y)\partial_{A_2} \\
&9.\quad X(H) = -H\partial_\omega + H_t\partial_{A_0} - H_x\partial_{A_1} - H_y\partial_{A_2}
\end{aligned} \tag{8.1}$$

$H \equiv H(x,y,t)$ est une fonction arbitraire; f et ω sont respectivement le module et la phase de ψ ($\psi = fe^{i\omega}$).

On reconnait parmi ces vecteurs ceux générant les translations d'espace et du temps (P), les rotations dans le plan x–y (R), les dilatations (D), les changements de repères galiléens (B) et les transformations conformes (C). $X(H)$ engendrent le groupe des transformations de jauge.

Déterminons les quantités associées aux symétries. En appliquant le théorème de Noether, on obtient [JP1], [JP2], [DUN], [DH-Rev]:

1. l'énergie

$$E = \frac{1}{2}\int (|\vec{D}\psi|^2 - g\varrho^2)dxdy \tag{8.2}$$

pour les translations du temps;

2. l'impulsion

$$\vec{P} = \int \vec{p}dxdy \equiv \int \frac{1}{2i}(\psi^*(\vec{D}\psi) - \psi(\vec{D}\psi)^*)dxdy \tag{8.3}$$

pour les translations d'espace;

3. le moment angulaire

$$M = \int \vec{x} \times \vec{p}\, dxdy \tag{8.4}$$

pour les rotations du plan x–y;
Toutes ces quantités sont invariantes par transformation de jauge.

4. En appliquant le théorème de Nœther aux générateurs infinitésimaux des boosts, B_i dans (8.1), on obtient des quantités

$$B_k = \int (p_k t - \frac{\kappa}{2}\epsilon_{kl}A_l)dxdy \qquad k = 1, 2, \tag{8.5}$$

qui ne sont pas invariantes par transformation de jauge. En effet, les générateurs B_k dans (8.1) ne tiennent pas compte du changement de la phase de ψ qui accompagne le changement de référentiel galiléen ($\psi \to \psi \exp[i\vec{v}.(\vec{x} + \vec{v}t/2)]$). Pour obtenir une quantité invariante par transformation de jauge, il faut considérer des transformations qui intègrent des changements de phase, soient

$$B_1 + aX(H) \qquad \text{et} \qquad B_2 + bX(H),$$

où a et b sont des constantes et $H \equiv H(x, y, t)$; on trouve alors $B_1 + X(-x)$ et $B_2 + X(-y)$ et la quantité conservée est

$$\vec{B} = t\vec{P} - \int \varrho\vec{r}\, dxdy, \tag{8.6}$$

5.

$$D = tE - \frac{1}{2}\int \vec{x}.\vec{p}\,dxdy \tag{8.7}$$

pour les dilatations.

6. La remarque du 4. est valable pour les transformations conformes, où il faut considérer la transformation

$$C - X\Big(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big).$$

La constante du mouvement associée invariante par transformation de jauge est

$$K = -t^2E + 2tD + \frac{1}{2}\int \varrho r^2 dxdy. \tag{8.8}$$

9. THEOREME DE JACKIW ET PI; SOLUTIONS AUTO-DUALES.

Le système (7.3) est difficile à résoudre; il semble que même s'il existe des solutions, obtenues par la réduction à des équations plus simples, (7.3) n'est pas complètement intégrable au sens où il ne remplit pas les critères de Painlevé, P1 et P2 [KNP] [LVW]. Cependant, comme souvent en théorie des champs, on peut essayer de résoudre les équations statiques par un Ansatz "auto-dual" pour une relation particulière des constantes g et κ.

Pour trouver des solutions statiques, il suffit de minimiser l'énergie

$$E = \frac{1}{2}\int (|\vec{D}\psi|^2 - g\varrho^2)dxdy. \tag{9.1}$$

En utilisant l'identité de Bogomol'nyi,

$$|\vec{D}\psi|^2 = |(D_1 \pm iD_2)\psi|^2 \pm B\varrho \pm \vec{\nabla}\times\vec{J}, \tag{9.2}$$

obtenue en utilisant les définitions (7.2) et (7.4) du champ magnétique B et du courant $\vec{J}$, et en supposant que $\vec{J}$ décroit assez rapidement à l'infini, l'énergie devient

$$E = \frac{1}{2}\int \{|(D_1 \pm iD_2)\psi|^2 \pm B\varrho - g\varrho^2\}dxdy; \tag{9.3}$$

en tenant compte de la contrainte de Chern-Simons (troisième équation de (7.3)), on a:

$$E = \frac{1}{2}\int \{|(D_1 \pm iD_2)\psi|^2 - (g \pm \frac{1}{\kappa})\varrho^2\}dxdy. \tag{9.4}$$

Pour la valeur critique de la constante de couplage,

$$g = \mp\frac{1}{\kappa}, \tag{9.5}$$

l'énergie est positive et le minimum absolu est obtenu pour des configurations vérifiant

$$(D_1 \pm iD_2)\psi = 0. \tag{9.6}$$

Pour la valeur (9.5) de g, ces configurations sont les seules qui existent: c'est le théorème de Jackiw et Pi.

Théorème:

Si $\kappa g = \pm 1$ alors toute solution statique est auto-duale.

En effet, puisque

$$D = tE - \frac{1}{2}\int \vec{x}.\vec{p}\,dxdy$$

et E sont des constantes du mouvement (cf. chapitre précédent), on a

$$E = \frac{1}{2}\partial_t\Big(\int \vec{x}.\vec{p}\,dxdy\Big)$$

et ainsi, pour une configuration statique, l'énergie est nulle, $E = 0$. On trouve alors, d'après (9.4),

$$\int \{|(D_1 \pm iD_2)\psi|^2 - (g \pm \frac{1}{\kappa})\varrho^2\}dxdy = 0.$$

Pour la valeur $g = \mp\frac{1}{\kappa}$, on a alors (9.6).

C.Q.F.D.

On peut déterminer la valeur de A^0; à l'aide de l'équation auto-duale, on établit alors les identités

$$\begin{aligned} \vec{D}^2 &= \mp i[D_1, D_2] = \mp B \\ \vec{J} &= \mp\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\varrho = \mp\frac{1}{2}(\partial_2\varrho\,\vec{\imath} - \partial_1\varrho\,\vec{\jmath}). \end{aligned} \tag{9.7}$$

En insérant la première égalité dans l'équation de Schrödinger statique, on obtient

$$\mp\frac{1}{2}B\psi + g\varrho\psi + A_0\psi = 0 \tag{9.8}$$

qui devient, lorsqu'on utilise la contrainte de Chern-Simons et (9.5),

$$A_0 = \pm\frac{1}{2\kappa}\varrho. \tag{9.9}$$

Les solutions statiques vérifient donc les égalités

$$A_1 = \pm\frac{1}{2}\partial_y \ln \varrho + \partial_x \omega,$$

$$A_2 = \mp\frac{1}{2}\partial_x \ln \varrho + \partial_y \omega, \tag{9.10}$$

$$A_0 = \pm\frac{1}{2\kappa}\varrho.$$

Les deux premières équations sont une autre manière d'écrire l'auto-dualité: en effet, elles correspondent respectivement aux parties imaginaires et réelles de l'équation (9.6) développée avec

$$D_k = \partial_k - iA_k, \qquad \psi = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\omega}.$$

(9.10) nous permet, en utilisant la contrainte de Chern-Simons, d'établir l'équation de Liouville dans le plan,

$$\Delta \ln \varrho = \pm\frac{2}{\kappa}\varrho.$$

La solution la plus générale de cette équation dépend de deux fonctions, l'une analytique $f(z)$, l'autre anti analytique $g(\bar{z})$ [DUN] et est donnée par

$$\varrho = \mp 4\kappa \frac{f'(z)g'(\bar{z})}{[1 + f(z)g(\bar{z})]^2}. \tag{9.11}$$

Pour avoir des solutions réelles et régulières, nous prenons $g(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ [JP1] [DUN], si bien que

$$\varrho = \mp 4\kappa \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}.$$

Puisque la densité de charges, ϱ, doit être positive, nous choisissons le signe de κ de manière à avoir

$$\mp\kappa = |\kappa|;$$

l'équation de Liouville devient alors

$$\Delta \ln \varrho = -\frac{2}{|\kappa|}\varrho, \tag{9.12}$$

et la densité de charges

$$\varrho = 4|\kappa| \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}. \tag{9.13}$$

Les solutions à symétrie radiale (quand on exprime les solutions en coordonnées polaires (r, θ), elles ne dépendent que de r) peuvent être calculées directement à partir de l'équation (9.12). On trouve

$$\varrho = 4|\kappa|N^2 r_0^2 \frac{r^{-2(N+1)}}{(1 + r_0^2 r^{-2N})^2}, \tag{9.14}$$

où r_0 et N sont des constantes d'intégration.

Pour fixer N, remarquons que la densité de charge se comporte comme

$$\varrho \sim \text{const.} \times r^{2(N-1)} \qquad \text{quand} \qquad r \to 0, \tag{9.15}$$

et

$$\varrho \sim \text{const.} \times r^{-2(N+1)} \qquad \text{quand} \qquad r \to \infty. \tag{9.16}$$

Le potentiel vecteur se comporte alors comme

$$A_k \sim \partial_k \omega \pm (N-1)\epsilon_{kl} \frac{x^l}{r^2} \qquad \text{quand} \qquad r \to 0, \tag{9.17}$$

Pour éviter que le potentiel vecteur soit singulier à l'origine, on doit choisir la phase

$$\omega = \pm(N-1)\theta \tag{9.18}$$

et ainsi la solution auto-duale est

$$\psi = 2\sqrt{|\kappa|} N r_0 \frac{r^{-N-1}}{1 + r_0^2 r^{2N}} \, e^{\pm i(N-1)\theta}. \tag{9.19}$$

Pour avoir ψ univoque, avec une décroissance vers 0 à l'infini, N doit être un entier strictement positif.

La solution radiale obtenue correspond à

$$f(z) = c_0 / z^N, \tag{9.20}$$

dans l'expression (9.13), avec $|c_0| = r_0$. Elle représente N vortex superposés à l'origine.

Une solution représentant N vortex séparés localisés respectivement en $\vec{r}_i$ peut être obtenue en posant dans (9.13)

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{z - z_i}, \tag{9.21}$$

où $z_i = x_i + iy_i$ est la notation complexe de $\vec{r}_i$. Une telle solution dépend de $4N$ paramètres et le flux associé est

$$\Phi = -4\pi N(\text{sign}\kappa). \tag{9.22}$$

Il a été montré, par la théorie de l'index d'Atiyah-Singer, qu'une solution représentant N vortex avec un flux égal à $-4\pi N(\text{sign}\kappa)$ dépend au maximum de $4N$ paramètres [KSY]. Nous reviendrons à ce problème au chapitre 11.

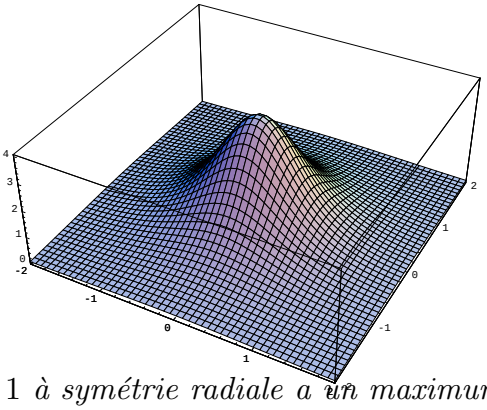


Fig. 1 *Le vortex $N = 1$ à symétrie radiale a un maximum en $r = 0$.*

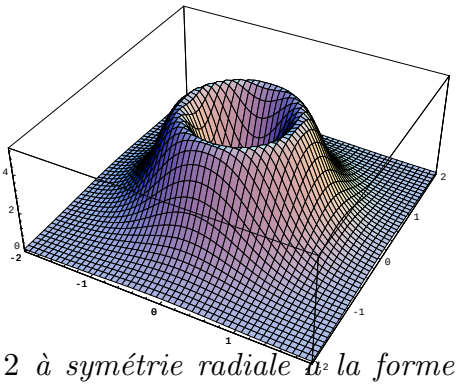


Fig. 2 *Le vortex $N = 2$ à symétrie radiale a la forme d'un "volcan". Pour $N \geq 2$, la densité de particules s'annule en $r = 0$.*

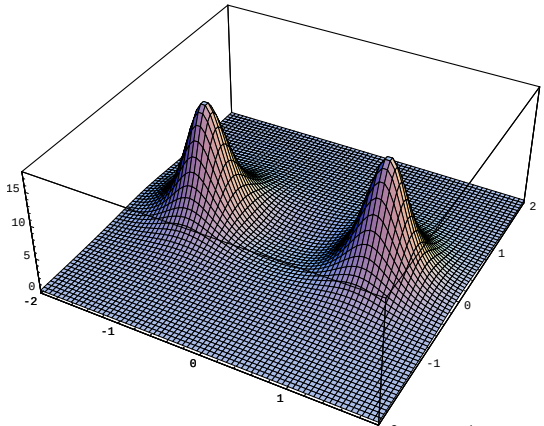


Fig. 3 *Le vortex $N = 2$ représentant deux 1-vortex (fig. 1) localisés en $x = \pm 1$ et $y = 0$.*

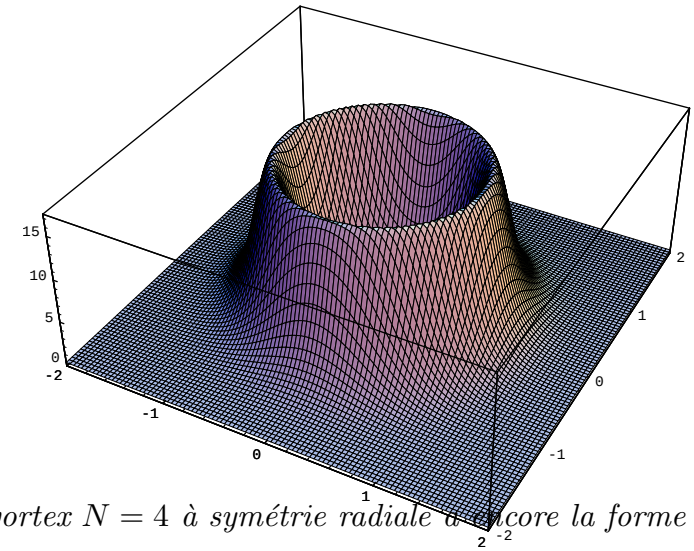


Fig. 4 *Le vortex $N = 4$ à symétrie radiale a encore la forme d'un volcan.*

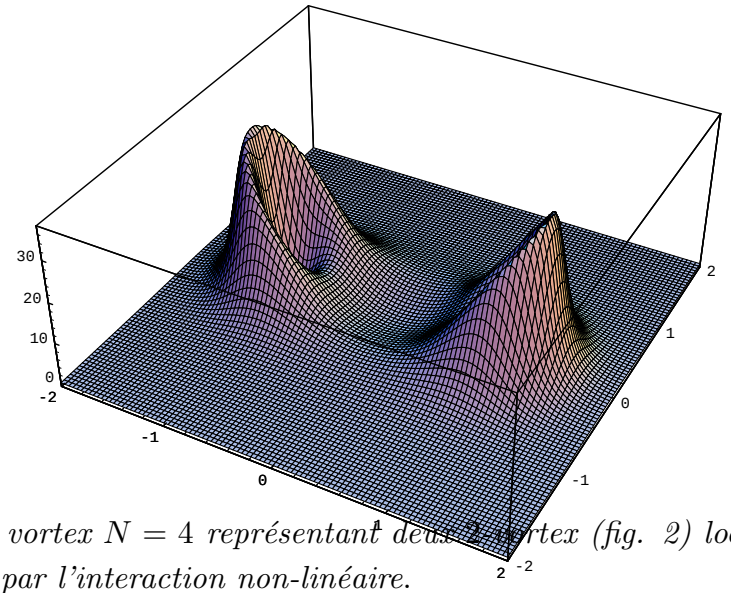


Fig. 5 *Le vortex $N = 4$ représentant deux 2-vortex (fig. 2) localisés en $x = \pm 1$ et $y = 0$, déformés par l'interaction non-linéaire.*

10. TEST DE PAINLEVE ET TRANSFORMATION DE BÄCKLUND. [HY]

Nous venons de voir que, dans le cas particulier où $\kappa g = \pm 1$, le système (7.3) statique se réduit à l'équation de Liouville qui est complètement intégrable. On peut se poser la question de l'existence d'autres réductions intégrables. Dans ce chapitre, nous étudions, par le test de Painlevé (P2), les conditions d'intégrabilité complète du système statique issu de (7.3), ceci quelque soit la valeur de la constante de couplage κ. Même si le modèle statique ne passe pas le test de Painlevé, on obtient des conditions de compatibilité, $\kappa g = \pm 1$, etc. qui permettront de réduire le modèle statique à un système intégrable. En fait, on obtient une seule réduction: l'équation de Liouville.

Considérons les équations de second ordre du modèle de Jackiw et Pi:

$$\begin{aligned} &(iD_t + \frac{1}{2}D_k^2 + g\varrho)\psi = 0, \\ &J_s^k = -\kappa\epsilon^{kl}E^l \qquad k = 1,2 \\ &\kappa B = -\varrho \end{aligned} \tag{10.1}$$

En posant $\Psi = \sqrt{\varrho}\, e^{i\omega}$ et en introduisant les nouvelles variables [KNP]

$$\begin{aligned} &\varrho = |\kappa|^3 f^2, && A_0 - \partial_t\omega = \frac{\kappa^2}{2}w, \\ &A_1 - \partial_1\omega = -\kappa u, && A_2 - \partial_2\omega = -\kappa v, \\ &x^0 = \frac{-2t}{\kappa|\kappa|}, && x^1 = \frac{x}{|\kappa|}, \qquad x^2 = \frac{y}{|\kappa|}, \end{aligned} \tag{10.2}$$

le système (10.1) devient:

$$\begin{aligned} (f^2)_t &= 2(uf^2)_x + 2(vf^2)_y, \\ f_{xx} + f_{yy} &= -2\epsilon^{-1}f^3 - f(w - u^2 - v^2), \\ -u_t + w_x &= 2vf^2, \\ -v_t + w_y &= -2uf^2, \\ u_y - v_x &= -f^2, \end{aligned} \tag{10.3}$$

où $\epsilon = 1/g|\kappa|$. Les deux premières équations correspondent respectivement aux parties imaginaire et réelle de l'équation non linéaire de Schrödinger. La première équation correspond aussi à l'équation de conservation de la supra-charge,

$$\partial_t \varrho + \vec{\nabla}.\vec{J} = 0,$$

et est la condition de compatibilité des trois dernières équations de (10.3).

Nous nous intéressons aux solutions statiques de (10.3); tenant compte de la remarque précédente, nous sommes ramenés aux équations:

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} &= -2\epsilon^{-1} f^3 - f(w - u^2 - v^2), \\ w_x &= 2vf^2, \\ w_y &= -2uf^2, \\ u_y - v_x &= -f^2, \end{aligned} \tag{10.4}$$

Etudions l'intégrabilité de (10.4) par le test de Painlevé (P2) [W1]; (10.4) passera le test de Painlevé si la solution (u, v, w, f) peut s'écrire sous la forme de séries de Laurent généralisées

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k \Phi^{k-p_u}, \quad & v &= \sum_{k=0}^{\infty} v_k \Phi^{k-p_v}, \\ w &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k \Phi^{k-p_w}, \quad & f &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \Phi^{k-p_f}, \end{aligned} \tag{10.5}$$

au voisinage de toute variété singulière mobile définie par l'équation $\Phi = 0$; p_u, p_v, p_w, p_f sont des entiers positifs.

Supposons que la solution (u, v, w, f), si elle existe, s'écrit sous la forme (10.5); alors en remplaçant u, v, w, f dans (10.4) par leur expression et en identifiant les termes en Φ^k pour chaque $k \geq 0$, on obtient [KNP]:

1. pour k=0,

$$p_u = p_v = p_f = 1, \qquad p_w = 2, \tag{10.6}$$

et

$$\begin{aligned} u_0 &= -\epsilon\, \Phi_y, & v_0 &= \epsilon\, \Phi_x, \\ w_0 &= \epsilon^2(\Phi_x^2 + \Phi_y^2), & f_0^2 &= -\epsilon\, (\Phi_x^2 + \Phi_y^2); \end{aligned} \tag{10.7}$$

2. pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} (k-1)\Phi_y u_k - (k-1)\Phi_x v_k + 2f_0 f_k &= S_k^{(1)}, \\ 2f_0 v_k - (k-2)\Phi_x w_k + 4v_0 f_0 f_k &= S_k^{(2)}, \\ -2f_0 u_k - (k-2)\Phi_y w_k - 4u_0 f_0 f_k &= S_k^{(3)}, \\ -2f_0 u_0 u_k - 2f_0 v_0 v_k + f_0 w_k + (k^2 - 3k - 4)(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) f_k &= S_k^{(4)}, \end{aligned} \tag{10.8}$$

avec

$$
\begin{aligned}
S_k^{(1)} =& - u_{k-1,y} + v_{k-1,x} - \sum_{j+j'=k} f_j f_{j'},\\
S_k^{(2)} =& w_{k-1,x} - 2 \sum_{j+j'+j''=k} v_j f_{j'} f j'' \\
S_k^{(3)} =& w_{k-1,y} + 2 \sum_{j+j'+j''=k} u_j f_{j'} f j'' \\
S_k^{(4)} =& - (k-2)(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) f_{k-1} - 2(k-2)(\Phi_x f_{k-1,x} + \Phi_y f_{k-1,y}) \\
& - f_{k-2,xx} - f_{k-2,yy} - 2\epsilon^{-1} \sum_{j+j'+j''=k} f_j f_{j'} f_{j''} \\
& - \sum_{j+j'=k} f_j w_{j'} + \sum_{j+j'+j''=k} f_j (u_{j'} u_{j''} + v_{j'} v_{j''})
\end{aligned}
\tag{10.9}
$$

où les j, j', j'' sont tous différents de k. Les équations ci-dessus forment un système linéaire, S_k, pour u_k, v_k, w_k, f_k; le déterminant de ce système est

$$
\det(S_k) = 2\epsilon(k+1)(k-1)(k-2)(k-4)(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)^3. \tag{10.10}
$$

On voit que

$$
\det(S_k) = 0 \qquad \text{pour} \qquad k = 1, 2, 4.
$$

Les systèmes (S_k), $k = 1, 2, 4$, auront des solutions s'ils satisfont à des conditions de compatibilité (C_k); dans ces cas l'une au moins des fonctions u_k, v_k, w_k, f_k devra être arbitraire. 1, 2 et 4 sont les valeurs de résonnance.

Pour $k = 1$, (10.8) devient

(10.11)

$$
\begin{aligned}
2 f_0 f_1 &= -u_{0y} + v_{0x}, \\
2 f_0^2 v_1 + \Phi_x w_1 + 4 v_0 f_0 f_1 &= w_{0x}, \\
-2 f_0^2 u_1 + \Phi_y w_1 - 4 u_0 f_0 f_1 &= w_{0y}, \\
-2 f_0 u_0 u_1 - 2 f_0 v_0 v_1 + f_0 w_1 - 6(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) f_1 &= (\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) f_0 + 2\big(\Phi_x f_{0x} + \Phi_y f_{0y}\big).
\end{aligned}
$$

De la première de ces équations et de (10.7), on déduit

$$
f_1^2 = -\epsilon \, \frac{(\triangle \Phi)^2}{4(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)}. \tag{10.12}
$$

Le déterminant de S_1 est nul, de même que celui du système déterminé par les 3 dernières équations. Ce système admettra des solutions si et seulement si

$$C1 \equiv (\epsilon^2 - 1)(\Phi_{xx}\Phi_y^2 - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_{yy}\Phi_x^2) = 0. \tag{10.13}$$

On veut Φ quelconque; ainsi

$$\epsilon^2 = 1 \qquad \text{i.e.} \qquad g = \frac{1}{|\kappa|}. \tag{10.14}$$

et u_1, v_1 peuvent s'exprimer comme fonction de w_1, qui est arbitraire.

Pour $k = 2$, (10.8) devient

$$\begin{aligned}
\Phi_y u_2 - \Phi_x v_2 + 2f_0 f_2 &= -u_{1y} + v_{1x} - f_1^2,\\
2f_0^2 v_2 + 4v_0 f_0 f_2 &= w_{1x} - 2(f_1^2 v_0 + 2v_1 f_0 f_1),\\
-2f_0^2 u_2 - 4u_0 f_0 f_2 &= w_{1y} + 2(f_1^2 u_0 + 2u_1 f_0 f_1),\\
-2f_0 u_0 u_2 - 2f_0 u_0 v_2 + f_0 w_2 & \\
-6(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) f_2 &= -(f_{0xx} + f_{0yy}) - 6\epsilon^{-1} f_1^2 f_0 - w_1 f_1\\
&\quad + f_0(u_1^2 + v_1^2) + 2f_1(u_0 u_1 + v_0 v_1).
\end{aligned} \tag{10.15}$$

On a déja vu que le déterminant de ce système est nul. Le système constitué par les 3 premières équations a aussi un déterminant nul; il est compatible si et seulement si

$$C2 \equiv \Phi_x\big(w_1 + \epsilon^2(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})\big)_x + \Phi_y\big(w_1 + \epsilon^2(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})\big)_y = 0. \tag{10.16}$$

Pour Φ quelconque, l'égalité précédente est vraie si et seulement si

$$w_1 = -2\epsilon\, f_0 f_1 = -\triangle\Phi. \tag{10.17}$$

u_2, v_2, w_2 peuvent alors s'exprimer en fonction de f_2 qui est arbitraire, cependant la condition de compatibilité (10.17) fixe la valeur de w_1 ce qui contredit le résultat de l'étude de S_1.

La condition (10.17) nous permet donc de dire, sans aller plus loin, que le système (10.4) ne passe pas le test de Painlevé. Néanmoins de telles conditions de compatibilité nous donnent des conditions de réduction du système initial à un ou plusieurs systèmes intégrables. On peut donc continuer l'étude des systèmes linéaires S_3 et S_4 pour déterminer la troisième condition de compatibilité (C4) et obtenir ainsi des réductions intégrables de (10.4).

Pour ne pas nous enfoncer dans de lourds calculs, nous avons raisonné autrement. On sait que l' étude du système S_4, en plus des conditions $C1$ et $C2$, nous donnera une

réduction intégrable de (10.4) et qu' alors on peut trouver une transformation de Bäcklund par la méthode de la variété singulière. Cette méthode consiste à annuler dans la série de Laurent (10.5) tous les termes en Φ^l, $l \geq 1$, ce qui donne dans notre cas

$$u_k = v_k = w_{k+1} = f_k \equiv 0 \quad \text{for} \quad k \geq 2, \tag{10.18}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} u &= -\epsilon\,(\ln\Phi)_y + u_1, \\ v &= \epsilon\,(\ln\Phi)_x + v_1, \\ w &= -\triangle \ln\Phi + w_2, \\ f^2 &= \epsilon\,\triangle \ln\Phi + f_1^2. \end{aligned} \tag{10.19}$$

On peut donc chercher notre transformation de Bäcklund sans les études de S_3 et S_4 puisque $u_3, v_3, w_3, f_3, u_4, \ldots$ n'interviennent pas dans (10.19). En tenant compte de la condition de compatibilité (10.17) et de (10.7), le système (S_1) devient

$$\begin{aligned} w_1 &= -2\epsilon f_0 f_1 = -\Delta\Phi, \\ 2\big(\Phi_x^2+\Phi_y^2\big)v_1 - \epsilon\,\triangle\,\Phi\,\Phi_x &= -\epsilon\big(\Phi_x^2+\Phi_y^2\big)_x, \\ 2\big(\Phi_x^2+\Phi_y^2\big)u_1 + \epsilon\,\triangle\,\Phi\,\Phi_y &= \epsilon\big(\Phi_x^2+\Phi_y^2\big)_y. \end{aligned} \tag{10.20}$$

La dernière équation est identiquement satisfaite; en effet elle devient

$$-2f_0u_0u_1 - 2f_0v_0v_1 - 2\epsilon f_1 f_0^2 + 6\epsilon f_0^2 f_1 = 2\epsilon f_0^2 f_1 - 2\epsilon^2 v_0\big(v_1f_0+v_0f_1\big) - 2\epsilon^2 u_0\big(u_1f_0+u_0f_1\big),$$

d'où

$$\epsilon f_0^2 f_1 = -(v_0^2+u_0^2)f_1,$$

ou encore

$$f_0^2 f_1 = -(\Phi_x^2+\Phi_y^2)f_1.$$

On peut aussi écrire les seconde et troisième équations sous les formes

$$f_{0_x} = -\epsilon(f_0v_1 + v_0f_1), \tag{10.21}$$

et

$$f_{0_y} = \epsilon(f_0u_1 + u_0f_1). \tag{10.22}$$

En insérant l'Ansatz (10.18) dans le système (S_2):

- la première équation devient

$$v_{1x} - u_{1y} = f_1^2; \tag{10.23}$$

- la seconde équation devient

$$\epsilon f_{0,x} f_1 + \epsilon f_0 f_{1,x} + f_1^2 v_0 + 2 f_1 f_0 v_1 = 0,$$

et en utilisant (10.21), on en déduit

$$v_1 = -\epsilon \frac{f_{1,x}}{f_1}, \tag{10.24}$$

aux points (x, y) où f_0 et f_1 ne s'annulent pas;

- la troisième équation devient

$$\epsilon f_{0,y} f_1 + \epsilon f_0 f_{1,y} - f_1^2 u_0 + 2 f_1 f_0 u_1 = 0,$$

et en utilisant (10.22), on obtient

$$u_1 = \epsilon \frac{f_{1,y}}{f_1}, \tag{10.25}$$

aux points (x, y) où f_0 et f_1 ne s'annulent pas;

- enfin la dernière équation devient

$$f_0 w_2 = -(f_{0,xx} + f_{0,yy}) - 4\epsilon f_0 f_1^2 + f_0(u_1^2 + v_1^2) + 2 f_1(u_0 u_1 + v_0 v_1),$$

et puisqu' en utilisant (4.21), (4.22), (4.24), (4.25) et (4.14), on a

$$f_{0,xx} + f_{0,yy} = f_0(u_1^2 + v_1^2) + 2 f_1(u_0 u_1 + v_0 v_1) - f_0 f_1^2 - f_1(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}),$$

notre équation devient

$$\begin{aligned} f_0 w_2 &= -3\epsilon f_0 f_1^2 + f_1(\Delta\Phi) \\ &= -\epsilon f_0 f_1^2, \end{aligned}$$

et donc aux points (x, y) où f_0 ne s'annule pas,

$$w_2 = -\epsilon f_1^2. \tag{10.26}$$

On reconnait en (10.24) et (10.25) l'auto-dualité et on peut faire un parallèle entre la relation (10.26) et celle,

$$A_0 = \pm \frac{1}{2\kappa} \varrho,$$

obtenue par Jackiw et Pi. De (10.23), (10.24) et (10.25), on déduit, si f_1 n'est pas identiquement nulle, l'équation de Liouville

$$\left(\frac{f_{1x}}{f_1}\right)_x + \left(\frac{f_{1y}}{f_1}\right)_y = -\epsilon f_1^2. \tag{10.27}$$

On sait que toute solution auto-duale vérifie le système statique (10.4). Ce résultat se retrouve quand on insère l'ansatz (10.18) dans S_3: on trouve alors que (u_1, v_1, f_1, w_2) vérifie (10.4). Enfin en insérant (10.18) dans S_k, $k \geq 4$, toutes les équations obtenuessont identiquement satisfaites.

Nous avons ainsi montré que même si le système initial (10.4) ne passe pas le test de Painlevé, il peut être réduit à l'équation de Liouville et les solutions sont self-duales: en effet si u_1, v_1, w_2 et f_1 vérifient les relations (10.24-10.26), on montre que u, v, w et f vérifient ces même relations.

En revenant aux notations physiques données par (10.2), on peut aussi énoncer la proposition suivante:

Les relations

$$\begin{aligned} \varrho &= \epsilon|\kappa| \ \triangle \ln \Phi + \rho, \\ \vec{A} &= \epsilon \, (\operatorname{sign} \kappa) \, \vec{\nabla} \times \ln \Phi + \vec{a} + \vec{\nabla}\omega, \\ A_0 &= -\frac{1}{2} \triangle \ln \Phi + a_0, \end{aligned} \tag{10.28}$$

où $(\rho, \vec{a}, a_0)$ *et* $(\varrho, \vec{A}, A_0)$ *vérifient (10.4), définissent une transformation de Bäcklund, pourvu que*

$$\begin{aligned} &(\triangle\Phi)^2 = -4\frac{\epsilon}{|\kappa|}\,\rho\big[(\partial_1\Phi)^2 + (\partial_2\Phi)^2\big], \\ &2(\operatorname{sign}\kappa)\big[(\partial_1\Phi)^2 + (\partial_2\Phi)^2\big]\,\epsilon_{ij}\,a_j + \epsilon\,\triangle\Phi\,\partial_i\Phi = \epsilon\,\partial_i\big[(\partial_1\Phi)^2 + (\partial_2\Phi)^2\big] \end{aligned} \tag{10.29}$$

($i = 1, 2$*).*

On peut aussi énoncer, puisque (10.4) se réduit à l'équation de Liouville,

la relation

$$\varrho = \epsilon|\kappa| \ \triangle \ln \Phi + \rho,$$

où ρ *et* ϱ *vérifient* $\Delta \ln \rho = -2\epsilon\rho$*, définit une transformation de Bäcklund pourvu que*

$$(\Delta\Phi)^2 = -4\frac{\epsilon}{|\kappa|}\,\rho\big[(\partial_1\Phi)^2 + (\partial_2\Phi)^2\big].$$

Construction de solutions

On peut trouver des solutions de (10.4) avec la proposition précédente; à partir d'une solution initiale ρ, on construit une nouvelle solution ϱ. Par un choix judicieux de ρ,

$$\rho = 0, \tag{10.30}$$

on simplifie l'équation (10.29) et on retrouve la solution générale (9.13) à partir de l'équation de Laplace

$$\Delta\Phi = 0. \tag{10.31}$$

En introduisant les variables complexes

$$z = x + iy, \qquad \bar{z} = x - iy,$$

(10.31) devient $\partial\bar{\partial}\Phi = 0$ dont la solution est

$$\Phi(z, \bar{z}) = f(z) + g(\bar{z}).$$

$f(z)$ étant une fonction analytique et $g(\bar{z})$ anti-analytique. On a alors d'après (10.28)

$$\varrho = 4\epsilon|\kappa| \frac{f'(z)g'(\bar{z})}{(1 + f(z)g(\bar{z}))^2},$$

et pour avoir ϱ réel positif on choisit $\epsilon = 1$ et $g(\bar{z}) = 1/\overline{f(z)}$; ainsi

$$\varrho = 4|\kappa| \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}.$$

On a aussi

$$\varrho = |\kappa| \triangle \ln \Phi = |\kappa| \triangle \ln \left[1 + |f|^2\right]. \tag{10.32}$$

Comme nous l'avons précisé à la fin du chapitre précédent, une solution représentant N vortex avec un flux $\Phi = -4\pi N(\text{sign}\kappa)$ dépend d'au plus $4N$ paramètres.

On peut discuter de la forme de $f(z)$. Dans le prochain chapitre, nous montrons, à l'aide d'un peu de géométrie différentielle et d'analyse complexe, que pour des vortex suffisamment localisés $f(z)$ est rationnelle. Cette démonstration est rendue possible par la forme particulière de la solution de l'équation de Liouville.

11. SOLUTIONS VORTEX DE L'EQUATION DE LIOUVILLE [HYH]

Une propriété étonnante des vortex non-topologiques est que leur charge [flux] magnétique est quantifié en multiples *pairs* du flux élementaire,

$$\Phi = 2N \times \Phi_0, \qquad \Phi_0 = -2\pi, \qquad N = 0, \pm 1, \ldots \tag{11.1}$$

L'entier N est ici interpété comme le *nombre des vortex*. Dans ce chapitre, notre but est de trouver la forme la plus générale des N-vortex.

Rappelons d'abord que, peu de temps après la construction des vortex non-relativistes par Jackiw et Pi [JP1], [JP2], il a été montré que, pour une valeur fixée du flux Φ, la solution dépendra de $4N$ paramètres [KSY]. Kim et al. montrent ce résultat en transformant le problème en un autre qui fait intervenir un opérateur différentiel à valeurs matricielles, D. Les déformations de carré integrable des champs qui préservent les équations auto-duales [appelées les modes zéro] forment le noyau de D. La dimension de *ker* D est alors trouvée à l'aide du théorème de l'indice d'Atiyah et Singer.

Cette démarche de "parameter-counting" par le théorème de l'indice [W] est parfaitement justifiée dans la cas des vortex dans le modèle Abélien de Higgs ou pour les monopoles non-Abéliens où les solutions exactes ne sont pas connues ou sont trop compliquées à écrire. Elle semble au contraire trop-puissante pour les vortex Chern-Simons non-relativistes, où toutes les solutions sont explicitement connues : en éliminant le potentiel vecteur, le problème est en effet réduit à l'équation de Liouville,

$$\triangle \ln \varrho = -\frac{2}{|\kappa|}\varrho, \tag{11.2}$$

dont la solution générale [réelle] est

$$\varrho = 4|\kappa| \frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}, \tag{11.3}$$

$f(z)$ étant une fonction analytique arbitraire sur le plan complexe. Il est facile de présenter une famille de solutions à $4N$ paramètres: par exemple, celle associée à

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{z - z_i} \tag{11.4}$$

où les c_i et les z_i $(i = 1, \ldots, N)$ sont des paramètres complexes. Ces solutions représentent en effet N vortex séparés, centrés aux points z_i; les paramètres c_i s'interprètent comme les phases et les échelles des vortex individuels. Cette famille dépendera bien du nombre

requis de paramétres et, comme nous le vérifierons plus tard, la charge magnétique associée est bien $-4\pi N(\text{sign}\kappa)$.

Comment peut-on passer d'une fonction analytique arbitraire $f(z)$ à une forme particulière comme en (11.4) ? Notons d'abord que toute solution de l'équation de Liouville ne représente pas un vortex. Pour cela, il faut que les champs physiques soient réguliers et que flux magnétique soit fini. Ci-dessous, nous montrons en effet la proposition suivante:

Théorème1 : *Considérons les solutions de vortex avec un flux*

$$\Phi = \int B(\vec{r})\, dxdy = -4\pi N(\text{sign}\kappa)$$

fixé. Si le champ magnétique B est une fonction régulière sur le plan complexe qui satisfait à la condition supplémentaire (H),

$$r^{2+\delta}B \quad \textit{borné} \quad \textit{quand} \quad r \to +\infty,$$

où δ est un réel strictement positif, alors la fonction f(z), qu'on suppose univoque, est rationnelle,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \tag{11.5}$$

Ici, $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes, avec $\deg\ P < \deg\ Q = N$, *le coefficient du terme de degré N étant normalisé à 1.*

Cette fonction f dépend visiblement de $4N$ paramètres réels. Les formes (11.4) et (11.5) sont d'ailleurs équivalentes, si toutes les racines de Q sont simples. Pour voir cela, il suffit de développer $P(z)/Q(z)$ en fractions rationnelles.

Observons aussi que les solutions de l'équation de Liouville, (11.2) sont invariantes par rapport au changement

$$f \to \frac{1}{f}. \tag{11.6}$$

Cette propriété, qui se vérifie aisément sur (11.3), a pour conséquence que les pôles et les racines de f jouent le même rôle.

Pour la démonstration de ce théorème, nous utilisons un peu de géométrie et d'analyse complexe. A l'aide d'une série de lemmes, nous éliminons tours à tours les fonctions avec des singularités essentielles; à la fin, il ne nous reste que les fonctions rationnelles. Compte tenu l'invariance de la solutions par $f \to 1/f$, on pourra toujours prendre la forme indiquée ci-dessus. Nous commençons par montrer la:

Proposition: *Soit $f(z)$ est une fonction de la variable complexe z qui, si elle admet des singularités, n'admet que des singularités isolées. Soient deux points z_0, z_1 et une courbe $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ évitant les singularités de $f(z)$ et telle que $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$. Alors on a l'inégalité :*

$$\frac{|f(z_0) - f(z_1)|}{\sqrt{1+|f(z_0)|^2}\sqrt{1+|f(z_1)|^2}} \;\leq\; \int_\gamma \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|dz|. \tag{11.7}$$

où $|dz| = |\frac{d\gamma}{dt}|dt$.

Géometriquement, cette proposition établit un lien entre la longueur d'une courbe et la densité du modèle de vortex : le carré de l'intégrand dans (11.7), est en effet la densité, ϱ, dans (11.3).

Pour la démonstration, rappelons d'abord que le plan complexe compactifié (avec le point à l'infini rajouté) s'identifie, par [l'inverse de] la projection stéréographique, à la sphère de Riemann, $\varphi : R^2 \to S^2 \subset R^3$. L'image d'un point $z = x + iy$ du plan complexe dans la sphère de Riemann plongée dans R^3 a pour coordonnées

$$\Big(\frac{2x}{1+(x^2+y^2)}, \frac{2y}{1+(x^2+y^2)}, \frac{x^2+y^2-1}{1+(x^2+y^2)}\Big).$$

La sphère hérite de la structure métrique naturelle de $\mathbf{R}^3$; la projection stéréographique munit alors le plan complexe d'une structure Riemannienne. Le produit scalaire de deux vecteurs tangents, u, v, au plan au point p est alors [THOR]

$$g_p(u,v) = \frac{4}{(1+|p|^2)^2}\; u \cdot v, \tag{11.8}$$

où " $\cdot$ " est le produit scalaire habituel dans $\mathbf{R}^2$, $|p|^2 = p \cdot p$. On peut alors calculer la longueur d'une courbe $[0,1] \ni t \mapsto \Gamma(t) \in \mathbf{C}$ par rapport à cette métrique,

$$\begin{aligned} L(\Gamma) &= \int_0^1 \Big\|\frac{d\Gamma}{dt}\Big\| dt, \\ \Big\|\frac{d\Gamma}{dt}\Big\| &= g_{\Gamma(t)}\big(\frac{d\Gamma}{dt}, \frac{d\Gamma}{dt}\big)^{1/2} = \frac{2|\Gamma'(t)|}{1+|\Gamma(t)|^2}. \end{aligned} \tag{11.9}$$

La distance de deux points du plan complexe, w_0 et w_1, par rapport à la métrique (11.8) est alors l'infimum des longueurs des courbes qui relient ces points:

$$d\big(w_0, w_1\big) = \mathrm{Inf}_\Gamma\Big\{ L(\Gamma) \;\Big|\; \Gamma(0) = w_0,\; \Gamma(1) = w_1 \Big\}.$$

Soit maintenant

$$w = f(z)$$

une fonction analytique. f peut être aussi vue comme une application du plan des z dans le plan des w. Ce dernier est muni de la fonction distance définie ci-dessus.

Si $\gamma(t)$ est une courbe quelconque dans le plan z ayant z_0 et z_1 pour extrémités, son image par f sera une courbe $\Gamma = f\circ\gamma$ dans le plan w ayant $w_0 = f\big(z_0\big)$ et $w_1 = f\big(z_1\big)$ pour extrémités. Or, d'après (11.9), la longueur de Γ est le membre de droite de (11.7),

$$L(\Gamma) = \int_\gamma \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|dz|. \tag{11.10}$$

Donc

$$d\big(w_0, w_1\big) = d\big(f(z_0), f(z_1)\big) \leq \int_\gamma \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|dz|. \tag{11.11}$$

D'autre part, la distance sur le plan des w n'est autre que la distance calculée sur la sphère de Riemann, qui, elle, est plongée dans l'espace $\mathbf{R}^3$. Par conséquent, la distance sur la sphère de Riemann est toujours minorée par la distance naturelle des point $\varphi(w_0)$ et $\varphi(w_1)$ dans l'espace $\mathbf{R}^3$:

$$d\big(w_0, w_1\big) \geq \frac{\big|w_0 - w_1\big|}{\sqrt{1+|w_0|^2}\,\sqrt{1+|w_1|^2}}, \tag{11.12}$$

l'égalité n'étant atteinte que pour $w_1 = w_0$. En posant $w_i = f(z_i),\ i = 0, 1$, l'inégalité (11.7) est obtenue.

C.Q.F.D.

Dans la suite de notre démonstration, nous utiliserons les thórèmes connus suivants [CART], [WHITT]:

Théorème de Picard.

Si z_0 est une singularité isolée de la fonction holomorphe $f(z)$, alors, pour tout $r > 0$, l'image par f de la couronne $\big\{z \in \mathbf{C}\big|0 < |z - z_0| < r\big\}$ est $\mathbf{C}$ tout entier ou $\mathbf{C}$ moins un seul point.

Théorème [WHITT].

Toute fonction univoque méromorphe sur le plan complexe fermé (y compris le point à l'infini) est rationnelle.

On établit alors les lemmes suivants:

Lemme 1. *La fonction $f(z)$ de de la densité de charges (11.3) n'admet pas de singularité essentielle dans le plan.*

Supposons que f admette une singularité essentielle isolée en z_0. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que f soit analytique sur $D \equiv D(z_0;\epsilon) \setminus \{z_0\}$. Par le théorème de Picard, la restriction de f sur D prend toutes les valeurs complexes sauf au plus une. Soit z_1 un point dans D tel que $f(z_1) = 0$.

Comme, par hypothèse, la densité ϱ est une fonction régulière sur la plan qui tend vers zéro à l'infini, il existe un nombre réel M tel que

$$\rho(z) = \frac{4|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2} \leq M^2, \qquad \forall z \in \mathbf{C}.$$

En utilisant la formule (11.7) de la proposition précédente avec $z_0 = z$, on a alors, comme $f(z_1) = 0$,

$$\frac{|f(z)|}{\sqrt{1+|f(z)|^2}} \leq M \int_\gamma |dz|$$

pour toute courbe γ vérifiant $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = z_1$. Pour le segment de droite $\gamma(t) = z + t(z_1 - z)$ en particulier, le membre de droite devient $|z_1 - z|M < 2\epsilon M$, car z_1 et z sont tous les deux dans D. Donc, en prenant ϵ de manière à avoir $4M\epsilon \leq 1$,

$$\frac{|f(z)|}{\sqrt{1+|f(z)|^2}} < \frac{1}{2},$$

ou encore

$$|f(z)| \leq 1.$$

$f(z)$ est ainsi bornée dans D, ce qui contredit l'hypothèse que z_0 est une singularité essentielle.

Remarquons pour terminer que, si f ne prend pas la valeur 0 dans $D \equiv D(z_0;\epsilon)$, on peut prendre z_0' avec $f(z_0')$ assez petit pour avoir $f(z)$ bornée dans D.

C.Q.F.D.

Ce premier lemme élimine, par exemple, des fonctions comme $f(z) = e^{1/z}$. On montre en effet que, pour ce choix, la densité associée (11.3) n'est pas bornée à l'origine. En écrivant z sous la forme $z = r\exp(i\theta)$, la densité devient en effet

$$\varrho = \frac{4\exp\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)}{r^4\left(1+\exp\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)\right)^2}$$

si bien que, pour $\theta = \pi/2$, $\lim_{r\to 0}\varrho = +\infty$.

Lemme 2. *La fonction $f(z)$ de la densité de charges (11.3) $f(z)$ n'admet pas de singularité essentielle à l'infini.*

Supposons, par l'absurde, que l'infini est une singularité essentielle de $f(z)$. Or ci-dessous on déduit de l'hypothèse (H) sur le comportement à l'infini du champ magnétique (voir l'énoncé du théorème) que f doit être bornée dans le voisinage de l'infini; une contradiction.

En effet, si l'infini est une singularité isolée, il existe un nombre $N > 0$ tel que $f(z)$ soit holomorphe sur $D \equiv \{z \in \mathbf{C} \Big| |z| > N\}$, qui est un voisinage de l'infini. Dans ce voisinage, on peut trouver un nombre complexe z_0 vérifiant $f(z_0) = 0$ ([3]).

A cause de l'hypothèse (H) du théorème, N peut être choisi suffisamment grand pour avoir

$$\varrho \leq C^2 |z|^{-2-\delta}, \quad \text{pour tout} \quad |z| > N, \tag{11.13}$$

où C est une constante positive. Choisissons N tel que $4C(\pi + \frac{1}{\delta}) < N^{\delta/2}$.

On a alors, pour tout nombre complexe z, $|z| > |z_0|$,

$$|f(z)| \leq 1. \tag{11.14}$$

En effet, soit z_1 le point intersection de la demi-droite $[0, z_0)$ et le cercle de centre O et de rayon $|z|$; on a alors

$$d(0, f(z)) \leq d(0, f(z_1)) + d(f(z_1), f(z)). \tag{11.15}$$

D'après l'inégalité (11.11) appliquée à l'arc de cercle (z_1, z) ayant l'origine pour centre, on a:

$$d(f(z_1), f(z)) \leq \int_{arc} \varrho(f(z))^{1/2} |dz|. \tag{11.16}$$

On en déduit, d'après (11.13),

$$d(f(z_1), f(z)) \leq \frac{2\pi C}{N^{\delta/2}}. \tag{11.17}$$

D'autre part, en appliquant (11.11) au segment $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0),\ t \in [0, 1]$,

$$d(0, f(z_1)) \leq \int_\gamma \varrho\big(f(z)\big)^{1/2} |dz| \leq \int_\gamma \frac{C}{|z|^{1+\delta/2}} |dz| \leq \frac{2C}{\delta N^{\delta/2}}, \tag{11.18}$$

([3]) Si $f(z)$ ne s'annulle jamais dans le voisinage considéré, il suffit de prendre $f(z_0)$ suffisamment petit ce qui changera peu les formules.

en utilisant (11.13). Des inégalités (11.15)–(11.17), on déduit

$$d(0, f(z)) \leq \frac{2C}{N^{\delta/2}}(\pi + \frac{1}{\delta}) < \frac{1}{2}; \tag{11.19}$$

d'après (11.12), on a l'inégalité

$$d(0, f(z)) \geq \frac{|f(z)|}{\sqrt{1 + |f(z)|^2}};$$

en tenant compte de (11.18), on déduit alors (11.14).

En conclusion, $f(z)$ reste bornée dans un voisinage de l'infini, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle l'infini est une singularité essentielle isolée.

C.Q.F.D.

Ce lemme élimine des $f(z)$ comme e^z. En effet, pour ce choix de $f(z)$, la densité de charges (11.3), s'écrit

$$\varrho = \frac{4}{\Big(\exp(-r\cos\theta) + \exp(r\cos\theta)\Big)^2},$$

si bien que pour $\theta = \pi/2$, $\varrho = 4$; la densité de charges n'est plus localisée.

En appliquant le théorème de Whittaker sur les fonctions analytiques méromorphe sur le plan fermé, cité ci-dessus, on peut énoncer le

Lemme 3. *f, n'ayant pas de singularité essentielle dans le plan et à l'infini est rationnelle.*

$f(z)$ s'écrit donc sous la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes. A cause de la symétrie $f \to \dfrac{1}{f}$ des solutions de l'équation de Liouville, on peut toujours prendre $\deg P(z) \leq \deg Q(z)$. On peut encore restreindre le choix des polynômes de façon à avoir $\deg P(z) < \deg Q(z)$. Pour le voir, remarquons que si $\deg P(z) = \deg Q(z)$, $f(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = f_0 + \frac{A(z)}{B(z)}, \tag{11.20}$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont des polynômes tels que $\deg A(z) < \deg B(z)$ et f_0 est un nombre complexe non nul. La densité de particules, $\varrho(z)$, associée à $f(z)$ est alors identique à la densité, $\tilde{\varrho}(z)$ associée à la fonction

$$\tilde{f}(z) = \frac{\tilde{A}(z)}{\tilde{B}(z)}, \tag{11.21}$$

où $\tilde{A}(z)$ et $\tilde{B}(z)$ sont des polynômes définis par:

$$\tilde{A}(z) = \frac{A(z)}{1+|f_0|^2},$$
$$\tilde{B}(z) = B(z) + (\frac{\bar{f}_0}{1+|f_0|^2})A(z).$$

En effet, la densité associée à la fonction $f(z)$

$$\varrho(z)^{1/2} = \frac{|A'B - B'A|}{|f_0 B + A|^2 + |B|^2},$$
$$= \frac{|A'B - B'A|}{|A|^2 + (1+|f_0|^2)|B|^2 + f_0 BA^* + f_0^* AB^*}.$$

Pour $\tilde{f}$ on trouve, à son tour,

$$\tilde{\varrho}(z)^{1/2} = (1+|f_0|^2)\frac{|A'B - B'A|}{|f_0 B + A|^2 + |A|^2 + |(1+|f_0|^2)B + f_0^* A|^2},$$
$$= \frac{|A'B - B'A|}{|A|^2 + (1+|f_0|^2)|B|^2 + f_0 BA^* + f_0^* AB^*}$$

ce qui est bien la même chose. Remarquons que $\deg \tilde{A} < \deg \tilde{B}$; on peut ainsi toujours choisir les polynômes $P(z)$ et $Q(z)$ avec $\deg P(z) < \deg Q(z)$.

Pour terminer la démonstration du théorème, il nous faut montrer que pour un flux, $\Phi = -4\pi N$, le polynôme $Q(z)$ est de degré N. Pour cela, remarquons d'abord que la densité (11.3) s'écrit aussi comme

$$\varrho = 4|\kappa|\bar{\partial}\Big[(\frac{\partial f}{f})\frac{|f|^2}{1+|f|^2}\Big].$$

Notons aussi que si $f(z)$ admet N_p pôles distincts z_i, $i = 1, .., N_p$, d'ordre respectifs n_i, la fonction

$$(\frac{\partial f}{f})\frac{|f|^2}{1+|f|^2} + \sum_{i=1}^{N_p}\frac{n_i}{z-z_i}$$

est régulière sur tout le plan complexe. En effet, dans le voisinage d'un pôle (noté z_i), d'ordre n_i,

$$f \sim \frac{c_i}{(z-z_i)^{n_i}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{f} \sim -\frac{n_i}{(z-z_i)}, \quad \frac{|f|^2}{1+|f|^2} \sim 1.$$

Notons que, dans le voisinage d'un zéro (noté z_0) d'ordre k, de f, on a :

$$f \sim (z - z_0)^k \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{f} \sim \frac{k}{z - z_0}, \quad \frac{|f|^2}{1 + |f|^2} \sim |z - z_0|^{2k},$$

de sorte que $(\partial f/f)(|f|^2/(1 + |f|^2)$ est régulier dans le voisinage considéré.

Comme

$$\bar{\partial} \left(\sum_{i=1}^{N_p} \frac{n_i}{z - z_i} \right) = 0,$$

la densité de particules s'écrit aussi

$$\varrho = 4|\kappa|\bar{\partial}\Big[(\frac{\partial f}{f})\frac{|f|^2}{1 + |f|^2} + \sum_{i=1}^{N_p} \frac{n_i}{z - z_i}\Big]. \tag{11.22}$$

Le crochet $[\dots]$ étant régulier, on peut calculer le flux magnétique en appliquant le théorème de Stokes; on obtient

$$\Phi = 2i(\text{sign}\kappa) \oint_S [(\frac{\partial f}{f})\frac{|f|^2}{1 + |f|^2} + \sum_{i=1}^{N_p} \frac{n_i}{z - z_i}]dz, \tag{11.23}$$

où $S \equiv S_\infty$ est le cercle à l'infini.

Le premier terme de l'intégrale s'annule: en effet, supposons que $f(z)$ admet N_z racines distinctes d'ordre respectif m_i; notre terme devient alors

$$\oint_S (\frac{\partial f}{f})\frac{|f|^2}{1 + |f|^2}dz = 2\pi i \lim_{|z|\to\infty} \frac{|f(z)|^2}{1 + |f(z)|^2}(\sum_{i=1}^{N_z} m_i - \sum_{i=1}^{N_p} n_i) = 0,$$

puisque $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$. Seul le second terme contribue donc au flux, si bien que

$$\Phi = -4\pi(\sum_{i=1}^{N_p} n_i)(\text{sign}\kappa). \tag{11.24}$$

Or les pôles de f sont les zeros de Q; leur nombre total étant égal au degré de $Q(z)$, on a

$$N = \sum_{i=1}^{N_p} n_i.$$

C. Q. F. D.

Précisons que le raisonnement précédent n'est vraie que si la fonction $f(z)$ est univoque; en particulier, le théorème de Whittaker n'est valable que pour de telles fonctions. Le cas $f(z)$ multivoque n'est pas traîté. Nous pouvons néanmoins remarqué que dans le cas particulier

$$f(z) = \ln z,$$

la densité de charges associée, ϱ, est multivoque et ainsi n'est pas une solution acceptable physiquement. Dans le cas radial

$$f(z) = \frac{c}{z^N},$$

nous avons montré (cf. (9.19)) que la régularité du champ ψ demande que N soit un entier positif. Des N fractionnels sont ainsi physiquement inacceptables.

III. VORTEX TOPOLOGIQUES;

LE MODELE DE MANTON.

Comme nous l'avons vu au chapitre II, le modèle de Jackiw et Pi possède des solutions "vortex" dites non topologiques

$$\lim_{r\to\infty} |\phi|^2 = 0.$$

Dans ce chapitre, nous étudions un modèle non relativiste qui admet des "vortex" dits topologiques

$$\lim_{r\to\infty} |\phi|^2 = \alpha \neq 0.$$

Le groupe de Schrödinger n'est plus un groupe de symétrie; cependant, certaines symétries de ce groupe sont conservées. Il existe aussi d'autres symétries qui résultent de l'équivalence du modèle avec un modèle Chern-Simons avec champ électromagnétique extérieur. Nous montrons aussi que le système étudié peut être vu comme limite non relativiste d'une théorie relativiste. Enfin, nous donnons une théorie similaire pour les spineurs.

12. LE MODELE DE MANTON. [MAN]

Nous désirons constuire une théorie qui satisfasse aux équations de l'électrodynamique de Chern-Simons et pour laquelle l'évolution de la fonction d'onde ϕ soit toujours décrite par l'équation non linéaire de Schrödinger couplée à un champ de jauge avec comme comportement asymptotique $\lim_{r\to\infty} |\phi|^2 = \alpha \neq 0$. Nous avons déja vu que la partie imaginaire de cette équation établissait la conservation d'une charge ρ; nous avions exactement

$$\partial_t |\phi|^2 + \vec{\nabla}.\vec{J^s} = 0, \tag{12.1}$$

et la densité de charges était définie par $\rho = |\phi|^2$. Mais on peut aussi définir cette densité de charges par

$$\rho = |\phi|^2 - \alpha, \tag{12.2}$$

α étant une constante, sans changer l'équation de conservation (1.1). En supposant l'absence de charges à l'infini, on a $\lim_{r\to\infty} |\phi|^2 = \alpha$; quitte à redéfinir $\phi \to \alpha\phi$, on peut toujours prendre $\alpha = 1$. Avec une telle définition de la charge, le courant

$$\vec{J^s} = \frac{1}{2i}\Big((\vec{D}\phi)\phi^* - \phi(\vec{D}\phi)^*\Big) \tag{12.3}$$

où $\vec{D} = \vec{\nabla} - i\vec{a}$, peut avoir une valeur asymptotique, $\vec{J^T}$, non nulle. On suppose $\vec{J^T}$ constante positive. Dans ce cas, si on prend $\vec{J} = \vec{J^s}$, le nombre de particules N ne se conserve pas:

$$\partial_t N \equiv \partial_t \int \rho \, dxdy = -\lim_{r\to\infty} \oint_{\mathcal{C}_r} \vec{J^s}.d\vec{l} \neq 0.$$

On définit alors le courant par

$$\vec{J} \equiv \vec{J^s} - \vec{J^T}. \tag{12.4}$$

Comme nous l'avons dit plus haut, ϕ vérifie une équation non linéaire de Schrödinger couplée au champ de jauge $a_\mu, \mu = 0, 1, 2$. On pose alors:

$$(iD_t + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} D_k^2 + F(\varrho))\phi = 0, \tag{12.5}$$

où $\varrho = |\phi|^2$ et la fonction $F(\varrho)$ dérive d'un potentiel d'interaction $U(\phi)$, $(F(\varrho) = -dU/d\varrho)$. Ici $D_t = \partial_t - ia_0$. D'autre part, le courant $\vec{J}$ et le champ électrique E_k sont liés par

$$J_k^s - J_k^T = -\kappa\epsilon_{kl}E_l \qquad k, l = 1, 2. \tag{12.6}$$

On peut rajouter au courant une contribution provenant de l'électromagnétisme de Maxwell; mais puisque nous désirons une théorie non relativiste, nous utiliserons la théorie de Le Bellac et Lévy Leblond, dans sa version magnétique (cf. chap. 6). Les nouvelles équations sont alors:

$$\begin{aligned} &(iD_t + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} D_k^2 + F(\varrho)\phi = 0, \\ &J_k^s - J_k^T = -\kappa\epsilon_{kl}E_l + \mu_0\epsilon_{kl}\partial_l B \qquad k, l = 1, 2. \end{aligned} \tag{12.7}$$

<u>*Contrainte de Chern-Simons.*</u>

La contrainte de Chern-Simons est toujours valable: en effet, on déduit de la seconde équation de (12.7)

$$\partial_k(\kappa\epsilon_{kl}E_l + J_k^s) = 0, \tag{12.8}$$

et en utilisant (6.3, i), on a

$$-\kappa\partial_t B + \partial_k J_k^s = 0; \tag{12.9}$$

en utilisant la conservation de la charge, cette équation devient

$$\partial_t(\rho + \kappa B) = 0. \tag{12.10}$$

On suppose que le modèle est au moins invariant par toute translation du plan (x, y); l'équation précédente donne alors

$$\kappa B = c - \rho, \tag{12.11}$$

où c est une constante. Puisqu'il n'y a par hypothèse ni champ, ni charge à l'infini, on a $c = 0$. En définitive, on s'intéresse au système constitué des équations (12.7) et (12.11). Il dérive de la densité lagrangienne

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& i(\phi^*(D_t\phi) - \phi(D_t\phi)^*) + \kappa(BA_0 + E_2A_1 - E_1A^2) - 2A_0 - \mu_0(B)^2 \\ & - \sum_{k=1}^{2}(D_k\phi)(D_k\phi)^* - 2A_kJ_k^T - 2U(\phi),\end{aligned} \tag{12.12}$$

Le modèle que nous allons étudier est du même type que le précédent. Il est donné par la densité lagrangienne (nous avons repris les mêmes notations que dans [MAN])

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M =& -\frac{1}{2}(B)^2 + \gamma\frac{i}{2}\Big(\phi^*(D_t\phi) - \phi(D_t\phi)^*\Big) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(D_k\phi)(D_k\phi)^* \\ & - \frac{\lambda}{8}(1-|\phi|^2)^2 + \mu(Ba_t + E_2a_1 - E_1a_2) - \gamma a_t - \vec{a}.\vec{J}^T.\end{aligned} \tag{12.13}$$

Les équations du mouvement sont

$$\{i\gamma D_t + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}D_k^2 + \frac{\lambda}{4}(1-|\phi|^2)\}\phi = 0, \qquad \text{(équation non linéaire de Schrödinger)} \tag{12.14}$$

$$\epsilon_{kl}\partial_l B = J_k^s - J_k^T + 2\mu\epsilon_{kl}E_l, \qquad k,l = 1,2, \qquad \text{(équation de Maxwell-Ampère)} \tag{12.15}$$

$$2\mu B = \gamma\Big(1 - |\phi|^2\Big). \qquad \text{(contrainte de Chern-Simons)} \tag{12.16}$$

Ce modèle est bien non relativiste. Pour le voir, montrons que les équations sont invariantes par toute transformation de Galilée. Sous la transformation des coordonnées

$$\begin{pmatrix}\vec{x}\\ t\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\tilde{\vec{x}} = \vec{x} - t\vec{v}\\ \tilde{t} = t\end{pmatrix} \tag{12.17}$$

le potentiel vecteur et le potentiel électrique se transforment selon (cf. I,Chap. 6) :

$$\begin{aligned}\tilde{a_t} &= a_t + \vec{v}.\vec{a},\\ \tilde{\vec{a}} &= \vec{a},\end{aligned} \tag{12.18}$$

et le champ de matière selon:

$$\tilde{\phi}(\tilde{\vec{x}},\tilde{t}) = \phi(\vec{x},t)e^{-i\gamma\vec{v}.(\vec{x}-\vec{v}t/2)}. \tag{12.19}$$

Le champ électromagnétique et le supracourant se transforment alors suivant

$$\begin{cases} \tilde{B}(\tilde{\vec{x}},\tilde{t}) = B(\vec{x},t), \\ \tilde{E}_k(\tilde{\vec{x}},\tilde{t}) = E_k(\vec{x},t) + \epsilon_{kl} v_l B(\vec{x},t), \\ \tilde{J}^s_k(\tilde{\vec{x}},\tilde{t}) = J^s_k(\vec{x},t) - \gamma v_k |\phi(\vec{x},t)|^2, \end{cases} \tag{12.20}$$

et le courant de transport suivant

$$\tilde{J^T_k} = J^T_k - \gamma v_k. \tag{12.21}$$

On vérifie alors directement que le système (12.14-12.16) reste invariant par les transformations précédentes. L'invariance galiléenne s'interprète alors comme suit: étant donné une solution des équations (12.14-12.16) avec $\vec{J^T} = \vec{0}$, l'effet de $\vec{J^T}$ est de "booster" cette solution à la vitesse $\vec{v} = \frac{1}{\gamma}\vec{J^T}$ d'où le nom "courant de transport".

13. SOLUTIONS STATIQUES AUTO-DUALES. [HHY1]

Dans le référentiel où $\vec{J^T} = 0$ (il peut toujours être atteint par un "boost" galiléen), les équations statiques de Manton sont :

$$\begin{cases} \gamma a_t \phi = -\dfrac{1}{2}\vec{D}^2\phi - \dfrac{\lambda}{4}\big(1-|\phi|^2\big)\phi, \\ \vec{\nabla} \times B = \vec{J} + 2\mu\vec{\nabla} \times a_t, \\ 2\mu B = \gamma\big(1-|\phi|^2\big). \end{cases} \tag{13.1}$$

Cherchons des solutions à énergie finie. L'énergie associée à la densité de lagrangien (12.13) est

$$H = \int \Big\{ \tfrac{1}{2}\big|\vec{D}\phi\big|^2 + \tfrac{1}{2}B^2 + U(\phi) \Big\} d^2\vec{x}, \qquad U(\phi) = \frac{\lambda}{8}\big(1-|\phi|^2\big)^2. \tag{13.2}$$

Elle correspond exactement à l'énergie dans le modèle abélien, statique et purement magnétique de Higgs; cependant, ici, le modèle n'est pas purement magnétique. En éliminant le terme magnetique $B^2/2$ par l'utilisation de la contrainte de Chern-Simons, on obtient

$$H = \int \Big\{ \tfrac{1}{2}\big|\vec{D}\phi\big|^2 + \frac{\Lambda}{8}\big(1-|\phi|^2\big)^2 \Big\} d^2\vec{x}, \qquad \Lambda = \lambda + \frac{\gamma^2}{\mu^2}. \tag{13.3}$$

Pour une configuration à énergie finie, on a les comportements asymptotiques suivants: $\vec{D}\phi \to 0$ et $|\phi|^2 \to 1$. Puisque (cf. 12.3)

$$a_k = -\frac{J_k}{|\phi|^2} + \partial_k(arg\,\phi), \qquad \lim_{r\to+\infty} \vec{J} = 0, \qquad \lim_{r\to+\infty} |\phi| = 1,$$

et que ϕ doit être univoque, il existe un entier n vérifiant

$$\int B\, d^2\vec{x} = \oint_S \vec{a}\cdot d\vec{\ell} = \oint_S \partial_k(arg\,\phi)\, dx^k = 2\pi n, \tag{13.4}$$

où S est le cercle à l'infini. L'entier n est le "winding number" de ϕ. Le flux est alors quantifié.

On obtient alors le nombre de particules grâce à (12.16):

$$N \equiv \gamma \int \left(1-|\phi|^2\right) d^2\vec{x} = 2\mu \int B\, d^2\vec{x} = 4\pi\mu n. \tag{13.5}$$

De l'expression (13.3) de l'énergie, on peut obtenir des solutions auto-duales. En utilisant l'identité de Bogomolny'

$$\left|\vec{D}\phi\right|^2 = \left|(D_1 \pm iD_2)\phi\right|^2 \pm B|\phi|^2 \pm \vec{\nabla}\times\vec{J} \tag{13.6}$$

l'énergie H s'écrit

$$\int \left\{\frac{1}{2}\left|(D_1 \pm iD_2)\phi\right|^2 + \left[\left(\mp\frac{\gamma}{4\mu}+\frac{\Lambda}{8}\right)(1-|\phi|^2)^2\right]\right\} d^2\vec{x} \pm \underbrace{\tfrac{1}{2}\int B\, d^2\vec{x}}_{\pi n} \pm \int \vec{\nabla}\times\vec{J}. \tag{13.7}$$

On suppose qu'il n'y a pas de champ électromagnétique à l'infini; on déduit alors de la seconde équation de (13.1) que le courant $\vec{J}$ s'annule aussi à l'infini. Le dernier terme de l'expression précédente s'annule alors et l'énergie devient

$$H = \int \left\{\frac{1}{2}\left|(D_1 \pm iD_2)\phi\right|^2 + \left[\left(\mp\frac{\gamma}{4\mu}+\frac{\Lambda}{8}\right)(1-|\phi|^2)^2\right]\right\} d^2\vec{x} \pm \underbrace{\tfrac{1}{2}\int B\, d^2\vec{x}}_{\pi n}; \tag{13.8}$$

elle est définie positive quand l'expression entre crochets s'annulent, i.e., pour la valeur critique

$$\lambda = \pm 2\frac{\gamma}{\mu} - \frac{\gamma^2}{\mu^2}. \tag{13.9}$$

Dans ce cas, l'énergie d'une configuration représentant n vortex est minorée par $\pi|n|$, $H \geq \pi|n|$; cette configuration statique est une solution des équations (13.1) si l'égalité est atteinte, c'est-à-dire si

$$(D_1 \pm iD_2)\phi = 0. \tag{13.10}$$

De cette équation, on déduit

$$\vec{D}^2\phi = \mp i\big[D_1, D_2\big]\phi = \mp B\phi, \qquad \vec{J} = \mp\tfrac{1}{2}\vec{\nabla}\times\varrho.$$

En insérant la première de ces égalités dans l'équation non linéaire de Schrödinger et en utilisant la contrainte de Chern-Simons, on trouve $a_t = (\pm 1/4\mu - \lambda/4\gamma)(1-\varrho)$. Le potentiel scalaire est alors

$$a_t = \tfrac{1}{4\mu}\big(\mp 1 + \tfrac{\gamma}{\mu}\big)\big(1-\varrho\big). \tag{13.11}$$

et le potentiel vecteur, exprimé à partir de l'Ansatz "self-dual" (13.10),

$$\vec{a} = \pm\tfrac{1}{2}\vec{\nabla}\times \ln\varrho + \vec{\nabla}\omega, \tag{13.12}$$

où ω est une fonction réelle arbitraire choisie pour avoir $\vec{a}$ régulier.

En insérant cette égalité dans la contrainte de Chern-Simons, nous obtenons l'équation

$$\triangle \ln\varrho = \alpha\big(\varrho - 1\big), \qquad \alpha = \pm\frac{\gamma}{\mu}, \tag{13.13}$$

qui ressemble à l'équation de Liouville. Pour avoir une densité d'énergie (13.2) positive, nous posons $\lambda > 0$. On déduit alors de l'équation (13.9) que $0 < \gamma/\mu < 2$ pour le signe supérieur, alors que $-2 < \gamma/\mu < 0$ pour le signe inférieur. Dans les deux cas, le coefficient α de $(\varrho - 1)$ dans (13.13) est toujours positif. Nous considérons alors l'équation

$$\triangle \ln\varrho = |\alpha|\big(\varrho - 1\big). \tag{13.14}$$

On n'a jamais trouvé de solutions explicites de cette équation. Cependant l'existence de solutions vortex a été démontrée par Jaffe et Taubes (cf. chap. 2). D'autre part, une solution dont le flux magnétique est $\Phi = 2\pi n$ dépend de $2n$ paramètres réels [JF], [W].

Notons que le champ électrique, $\vec{E} = \vec{\nabla}a_t$, s'annule uniquement pour $\mu = \pm\gamma$, c'est-à-dire quand $\alpha = 1$. Les équations "self-duales" deviennent alors les équations de Bogomolny

$$\begin{aligned} &(D_1 \pm iD_2)\phi = 0, \\ &B = \pm\frac{1}{2}(1 - |\phi|^2). \end{aligned} \tag{13.15}$$

14. VORTEX DANS UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE EXTERIEUR. [HHY1]

Nous montrons dans ce chapitre que le modèle de Manton est équivalent au modèle décrivant un champ scalaire non relativiste avec une dynamique Ampère-Chern-Simons dans un champ électromagnétique extérieur constant. Ceci peut se voir directement au niveau des équations du mouvement; en effet si on pose

$$B^{ext} \equiv \frac{\gamma}{2\mu}, \qquad E_k^{ext} \equiv -\frac{\epsilon_{kl}J_l^T}{2\mu}, \tag{14.1}$$

les équations du mouvement (12.14-12.16) deviennent

$$\begin{cases} i\gamma D_t\phi = -\dfrac{1}{2}\vec{D}^2\phi - \dfrac{\lambda}{4}(1-|\phi|^2)\phi, \\ \epsilon_{ij}\partial_j\tilde{B} = J_i + 2\mu\epsilon_{ij}\tilde{E}_j, \\ 2\mu\tilde{B} = -\gamma|\phi|^2, \end{cases} \tag{14.2}$$

où $\tilde{B} = B - B^{ext}$, $\tilde{E}_i = E_i - E_i^{ext}$ et $D_k = \partial_k - ia_k$ avec $a_k = \tilde{A}_k + A_k^{ext}$; on a alors

$$\tilde{B} = \partial_1\tilde{A}_2 - \partial_2\tilde{A}_1, \qquad \tilde{E}_k = \partial_k\tilde{A}_0 - \partial_t\tilde{A}_k. \tag{14.3}$$

On peut aussi obtenir l'équivalence des deux modèles à partir des lagrangiens; celui de Manton peut être obtenu par un "boost" galiléen du lagrangien dans un champ magnétique extérieur. La densité du lagrangien du problème avec un champ électro-magnétique extérieur est donné par:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{ext} =& \gamma\frac{i}{2}(\phi^*(D_t\phi) - \phi(D_t\phi)^*) - \frac{1}{2}(\vec{D}\phi)(\vec{D}\phi)^* - U(\phi) - \frac{1}{2}\tilde{B}^2 \\ &+ \mu(\tilde{B}\tilde{A}_0 + \tilde{E}_2\tilde{A}_1 - \tilde{E}_1\tilde{A}_2), \end{aligned} \tag{14.4}$$

où $U(\phi) = \frac{\lambda}{8}(1-|\phi|^2)^2$. En prenant alors $A_k^{ext} = -\gamma\epsilon_{kl}x_l/4\mu$ et $A_0^{ext} = 0$, on a:

$$\tilde{B}^2 = B^2 - \frac{\gamma}{2\mu}B + (\frac{\gamma}{2\mu})^2,$$

$$\tilde{B}\tilde{A}_0 = Ba_0 - \frac{\gamma}{2\mu}a_0,$$

$$\tilde{E}_2\tilde{A}_1 = E_2a_1 + \frac{\gamma}{4\mu}\Big\{ - a_0 + \partial_y(a_0y) - \partial_t(a_2y)\Big\},$$

$$\tilde{E}_1\tilde{A}_2 = E_1a_2 + \frac{\gamma}{4\mu}\Big\{a_0 - \partial_x(a_0x) + \partial_t(a_1x)\Big\};$$

en éliminant les termes de surface, on obtient, à un terme près correspondant au courant de transport, le modèle de Manton, soit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{ext} =& \gamma\frac{i}{2}(\phi^*(D_t\phi) - \phi(D_t\phi)^*) - \frac{1}{2}(\vec{D}\phi)(\vec{D}\phi)^* - U(\phi) - \frac{1}{2}B^2 \\ &+ \mu(Ba_0 + E_2a_1 - E_1a_2) - \gamma a_0. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Le terme du courant de transport dans le modèle de Manton est rétabli par le changement de repère galiléen

$$\begin{aligned} &\vec{X} = \vec{x} + t\vec{v}, && T = t, \\ &A_0 = a_0 - \vec{v}.\vec{a}, && \vec{A} = \vec{a}, \\ &\Phi(\vec{X}, T) = \phi(\vec{x}, t)e^{i\gamma\vec{v}.(\vec{x}+\vec{v}t/2)}; \end{aligned} \tag{14.6}$$

Pour un tel changement, le terme de Chern-Simons est invariant et on a

$$D_k\phi = (D_k\Phi - i\gamma v_k\Phi)e^{-i\gamma\vec{v}.(\vec{X}-\vec{v}t/2)},$$
$$D_t\phi = \Big(D_t\Phi + v_kD_k\Phi - \frac{\gamma}{2}|\vec{v}|^2\Phi\Big)e^{-i\gamma\vec{v}.(\vec{X}-\vec{v}t/2)};$$

on en déduit les relations

$$|\vec{D}\phi|^2 = |\vec{D}\Phi|^2 + \gamma^2|\vec{v}|^2|\Phi|^2 + \gamma\vec{v}\cdot\underbrace{i\Big\{(\vec{D}\Phi)\Phi^* - (\vec{D}\Phi)^*\Phi\Big\}}_{-2\vec{\mathrm{J}}^s}, \tag{14.7}$$

$$(\phi^*(D_t\phi) - \phi(D_t\phi)^*) = (\Phi^*(D_t\Phi) - \Phi(D_t\Phi)^*) + 2i\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{J}}^s - i\gamma|\vec{v}|^2|\Phi|^2; \tag{14.8}$$

$$\vec{J}^s = \vec{\mathrm{J}}^s - \gamma\vec{v}|\Phi|^2; \tag{14.9}$$

on obtient ainsi le lagrangien

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{ext} =& \gamma\frac{i}{2}(\Phi^*(D_t\Phi) - \Phi(D_t\Phi)^*) - \frac{1}{2}(\vec{D}\Phi)(\vec{D}\Phi)^* - U(\phi) - \frac{1}{2}B^2\\ & \mu(BA_0 + E_2A_1 - E_1A_2) - \gamma A_0 - \gamma\vec{v}.\vec{A},\end{aligned} \tag{14.10}$$

qui est celui de Manton avec $\vec{v} \equiv \vec{\mathrm{J}}^T/\gamma$.

Remarque: Notons que le raisonnement précédent est valable quelque soit le potentiel d'interaction $U(\phi)$.

15. SYMETRIES. [HHY1], [HH1]

L'interprétation précédente du modèle de Manton, qu'on peut voir comme décrivant une interaction entre particules dans un champ extérieur, va nous aider à construire des symétries du système. Auparavant, rappelons le lien entre les symétries du modèle sans champ extérieur et celles du modèle avec champ magnétique extérieur, $A_0^{ext} = 0$, avec comme potentiel $U = -(g/2)|\phi|^4$.

Le modèle de Jackiw et Pi admet le groupe de Schrödinger comme groupe de symétrie (cf. Partie 1). Il est engendré par le champ de vecteur à huit paramètres

$$\begin{pmatrix} X^t \\ \\ \vec{X}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\chi t^2 - \delta t - \epsilon \\ \\ R\vec{x} - (\frac{1}{2}\delta + \chi t)\vec{x} + \vec{\beta}t + \vec{\gamma}\end{pmatrix}.$$

Quand on rajoute à ce modèle le terme $-\frac{1}{2}B^2$ de manière à obtenir le lagrangien (14.4), avec $U \propto |\phi|^4$, sans champ extérieur ($A_\mu^{ext} = 0$), le groupe de Schrödinger reste un groupe de symétrie. Mais, quand on impose un champ extérieur, les symétries qui subsistent, au sens de [MJ] [MF], sont celles pour lesquelles il existe un champ Ψ vérifiant

$$X^\alpha F_{\alpha\beta}^{ext} = \partial_\beta \Psi. \tag{15.1}$$

Pour un champ électromagnétique extérieur constant, la symétrie du groupe de Schrödinger est brisée; seules les translations d'espace et de temps survivent et on trouve

$$\begin{aligned} &\Psi = \vec{x}.\vec{E}^{ext}\epsilon, \quad \epsilon \in \mathbf{R} && \text{pour les translations du temps,} \\ &\Psi = B^{ext}\vec{\gamma} \times \vec{x} + t\vec{\gamma}.\vec{E}^{ext}, \quad \vec{\gamma} \in \mathbf{R}^2 && \text{pour les translations d'espace.} \end{aligned} \tag{15.2}$$

Par contre, si $B^{ext} = 0$, les transformations de référentiels galiléens sont encore des symétries

$$\Psi = \frac{t^2}{2}\vec{v}.\vec{E^{ext}}, \quad \vec{v} \in \mathbf{R}^2$$

et si $\vec{E}^{ext} = 0$, les rotations sont encore des symétries

$$\Psi = \Omega B^{ext}\frac{||\vec{x}||^2}{2}, \quad \Omega \in \mathbf{R}.$$

Il existe d'autres symétries, quand $B^{ext} \neq 0$ et $\vec{E}^{ext} = 0$, qui forment un groupe à huit paramètres isomorphe au groupe de Schrödinger; ces symétries sont "importées" du modèle (14.4), avec $U \propto |\phi|^4$, sans champ extérieur [EHI]. Pour les construire, il faut considérer la transformation suivante d'espace–temps et des fonctions

$$\begin{cases} t' = \dfrac{1}{\omega}\tan(\omega t), \\ x'^k = x^k + \epsilon^{kl}x^l \tan(\omega t), \qquad k = 1, 2, \\ \phi'(\vec{x}', t') = \cos(\omega t)\exp\{\dfrac{i}{2}\omega r^2 \tan(\omega t)\}\phi(\vec{x}, t), \\ a'_\nu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}a_\mu, \end{cases} \tag{15.3}$$

où les primes représentent les variables et champs pour le modèle sans champ extérieur et $\omega = B^{ext}/2$; par cette transformation, on passe du modèle (14.4) avec champ magnétique extérieur, $B^{ext} \neq 0$ et $A_0^{ext} = 0$ au modèle (14.4) sans champ extérieur, $A_\mu^{ext} = 0, \mu = 0, 1, 2$, [JP2],[EHI].

On obtient alors les symétries "importées" en appliquant les étapes suivantes:

1. à partir du modèle avec champ magnétique extérieur, on revient au système sans champ extérieur par la transformation précédente;

2. on fait opérer la symétrie sur le modèle sans champ extérieur;

3. on retourne au système avec B^{ext} par la transformation inverse de (15.3).

Les symétries ainsi obtenues sont des symétries du modèle (14.4) avec champ magnétique extérieur; elles sont "importées" du modèle (14.4) sans champ extérieur.

D'autre part pour passer au modèle (14.10), avec $U \propto |\phi|^4$, il faut appliquer à (14.4), avec $A_0^{ext} = 0$ et $A_k^{ext} = -\gamma \epsilon_{kl} x_l / 4\mu$, le "boost" galiléen (14.6). On peut alors de nouveau importer les symétries et on obtient les générateurs suivants:

(15.4)

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}^t \\ \vec{\mathcal{T}} \end{pmatrix} = \cos\omega t \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_1 \cos\omega t - \gamma_2 \sin\omega t \\ \gamma_1 \sin\omega t + \gamma_2 \cos\omega t \end{pmatrix} \qquad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{R} \quad \text{"translations" d'espace,}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}^t \\ \vec{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = -\frac{\sin\omega t}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \cos\omega t - \beta_2 \sin\omega t \\ \beta_1 \sin\omega t + \beta_2 \cos\omega t \end{pmatrix} \qquad \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R} \quad \text{"boosts",}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}^t \\ \vec{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega(y - (E_1^{ext}/B^{ext})t) \\ \Omega(x + (E_2^{ext}/B^{ext})t) \end{pmatrix} \qquad \Omega \in \mathbf{R} \quad \text{"rotations";}$$

ici, les guillemets indiquent qu'il sagit de vraies translations, etc., importées. Ces transformations sont des symétries du modèle (14.10), avec $U \propto |\phi|^4$. Elles sont "importées" du modèle (14.4), avec $U \propto |\phi|^4$ et sans champ extérieur. Il existe trois autres générateurs correspondant aux "translations" de temps, aux "dilatations" et aux "expansions"; nous avons omis leurs expressions compliquées parce que nous n'en aurons pas besoin dans la suite. Précisons tout de même que leur action sur le champ ϕ se traduit par un changement de phase et l'apparition d'un facteur conforme qui dépend de t, $\mathcal{C}(t)$. Remarquons aussi que les "rotations" deviennent de vraies rotations, comme dans [EHI], lorsque $\vec{E}^{ext} = 0$.

Nous n'avons pas écrit l'action des symétries précédentes sur le champ ϕ parce que les expressions sont trop compliquées. Pour s'en convaincre, regardons l'action d'un "boost" importé sur le champ ϕ (en présence d'un champ magnétique extérieur uniquement); elle

est donné par [EHI]:

$$\begin{cases} \tilde{t} = t, \\ \tilde{x}^k = x^k + R^k(t), \\ \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{\vec{x}}) = \exp\Big[-\dfrac{i}{2}\omega \tan(\omega t)(R^2 + 2x^k R^k)\Big] \\ \qquad\qquad \cdot \exp i\Big[V^k(x^k + \tan(\omega t)\epsilon^{kl}x^l) + \dfrac{V^2}{2\omega}\tan(\omega t)\Big]\phi(t, \vec{x}), \end{cases}$$

où $R^k = \frac{\omega}{2}[-\epsilon^{kl}V^l + \sin(2\omega t)V^k + \cos(2\omega t)\epsilon^{kl}V^l]$; les $V^k, k = 1, 2$ sont des paramètres réels arbitraires. Pour avoir l'action sur le champ ϕ d'un "boost" importé au modèle (14.10), il faut encore tenir compte du changement de référentiel galiléen (14.6).

Revenons maintenant au modèle de Manton, c'est-à-dire à (14.10) avec $U = (\lambda/2)(1 - |\phi|^2)^2$. Ce potentiel brise certaines symétries importées précédentes, à savoir les "dilatations", les "expansions" et les "translations" de temps. En effet, on peut voir directement sur l'équation non linéaire de Scrhödinger (12.13) que c'est l'apparition du facteur conforme $\mathcal{C}(t)$ qui est responsable de cette brisure de symétrie. C'est une raison pour laquelle nous ne les avons pas écrites. Ainsi, il ne reste plus qu'un sous-groupe à cinq paramètres, constitué des "translations", des "boosts" et des "rotations".

Jusqu'à présent, nous avons traité des symétries "importées" du modèle (14.4) sans champ extérieur. Remarquons aussi que les vraies translations du temps et de l'espace, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t + a \\ \vec{x} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} + \vec{b} \end{pmatrix}$$

sont encore des symétries du modèle de Manton. Les constantes du mouvement associées, calculées à partir du théorème de Nœther sont:

- l'énergie, pour les translations du temps,

$$H = \int [\frac{1}{2}|\vec{D}\phi|^2 + \frac{\Lambda}{8}(1 - |\phi|^2) + \vec{a}.\vec{J^T}]\, dxdy, \tag{15.5}$$

- l'impulsion,

$$\mathcal{P}_k = \gamma \int \big(J_k + a_k\big)\, dxdy. \tag{15.6}$$

On notera que l'énergie peut diverger puisque $|\vec{D}\phi| \to |\vec{J^T}|$ et $|\phi| \to 1$.

On peut, en utilisant la relation entre le modèle de Manton et le modèle (14.4) dans un champ magnétique extérieur, donner une autre expression de l'énergie qui, elle, convergera. Pour cela, remarquons qu'à une translation du temps

$$\tilde{T} = T + \alpha, \qquad \tilde{\vec{X}} = \vec{X},$$

du modèle de Manton correspond la transformation

$$\tilde{t} = t + \alpha, \qquad \tilde{\vec{x}} = \vec{x} - \alpha\vec{v},$$

du modèle (14.4) avec champ magnétique extérieur, c'est-à-dire (14.15). La constante du mouvement associée à cette dernière symétrie est:

$$H = H_B + \vec{v}.\vec{\mathcal{P}}_B, \tag{15.7}$$

où l'indice B indique qu'on est en présence d'un champ magnétique extérieur, et

$$\begin{aligned} H_B &= \int \frac{1}{2}\Big(|\vec{D}\phi|^2 + \frac{\Lambda}{8}(1-|\phi|^2)\Big)\, dxdy, \\ \mathcal{P}_{B,k} &= \mathcal{P}_k = \gamma \int \Big(J_k + a_k\Big)\, dxdy. \end{aligned} \tag{15.8}$$

On obtient alors, en tenant compte du boost (14.6), des relations (14.7-14.9),

$$H = \int \Big\{\frac{1}{2}|\vec{D}\Phi|^2 - \frac{1}{2}|\vec{J}^T|^2|\Phi|^2 + \frac{\Lambda}{8}(1-|\Phi|^2) + \vec{A}.\vec{J}^T\Big\}\, dXdY. \tag{15.9}$$

On obtient aussi, pour l'impulsion,

$$\mathcal{P}_k = \gamma \int \Big\{J_k - J_k^T|\Psi|^2 + A_k\Big\}\, dXdY, \tag{15.10}$$

Remarque importante:

Le crochet de Poisson des impulsions ne s'annule pas,

$$\big\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\big\} = \gamma \int B\, d^2x = \gamma 2\pi n. \tag{15.11}$$

Preuve:

Le crochet de Poisson des quantités $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est donnée par

$$\begin{aligned} \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\} =& \frac{1}{i}\int \Big(\frac{\delta\mathcal{P}_1}{\delta\phi}\frac{\delta\mathcal{P}_2}{\delta\phi^*} - \frac{\delta\mathcal{P}_1}{\delta\phi^*}\frac{\delta\mathcal{P}_2}{\delta\phi}\Big)dxdy \\ &+ \frac{1}{2\mu}\int \Big(\frac{\delta\mathcal{P}_1}{\delta a_1}\frac{\delta\mathcal{P}_2}{\delta a_2} - \frac{\delta\mathcal{P}_1}{\delta a_2}\frac{\delta\mathcal{P}_2}{\delta a_1}\Big)dxdy, \end{aligned} \tag{15.12}$$

où $\dfrac{\delta\mathcal{P}_i}{\delta\phi}$, $i = 1, 2$, est la dérivée de Fréchet définie par

$$< \frac{\delta\mathcal{P}_i}{\delta\phi}, \psi >= \lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{P}_i(\phi + h\psi) - \mathcal{P}_i(\phi)}{h}, \forall\psi \in \mathcal{D}(R^2). \tag{15.13}$$

Après calculs, on obtient , en posant $\phi = fe^{i\omega}$,

$$\begin{aligned}\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\} &= \gamma \int \vec{\nabla} \times [f^2(\vec{\nabla}\omega - \vec{J^T})]\, dxdy \\ &= \gamma \oint_{S^\infty} \left(\vec{\nabla}\omega - \vec{J^T}\right) \cdot d\vec{l},\end{aligned} \tag{15.14}$$

par le théorème de Stokes. Deux cas se présentent:

1. Si $\vec{J^T} = 0$, $\lim_{r\to+\infty} \vec{J} = 0$; $\vec{A}$ est alors une jauge pure à l'infini, $\vec{A} = \vec{\nabla}\omega$, et ainsi

$$\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\} = \gamma \oint_{S^\infty} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2\pi\gamma n. \tag{15.15}$$

2. Si $\vec{J^T} \neq 0$, on peut se ramener au premier cas par un changement de repère galiléen

$$\vec{x} \to \tilde{\vec{x}} + \frac{\vec{J^T}}{\gamma} t; \tag{15.16}$$

on sait alors que la phase ϕ s'exprime comme

$$\omega = \tilde{\omega} + \frac{\vec{J^T}}{\gamma} \cdot (\vec{x} + \vec{v}t/2). \tag{15.17}$$

où $\tilde{\omega}$ est la phase du champ de matière dans le référentiel où $\vec{J^T} = 0$ On en déduit

$$\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\} = \gamma \oint_{S^\infty} \vec{\nabla}\tilde{\omega} \cdot d\vec{l}, \tag{15.18}$$

et on retrouve le cas précédent.

16. MODELE RELATIVISTE ET LIMITE NON RELATIVISTE. [HHY1]

Nous présentons un modèle relativiste, en théorie Maxwell-Chern-Simons, qui admet des solutions statiques "auto-duales" et dont la limite non relativiste magnétique, au sens de Le Bellac et Lévy Leblond, donne le système de Manton. En général, pour de telles théories, les solutions auto-duales non purement magnétiques existent en présence d'un champ auxiliaire neutre N (réel) [LLM], [DT], [DUN].

On considère un espace de Minkowski de dimension $(1+2)$ avec la métrique $c^2/\gamma, -1, -1)$ où $\gamma > 0$ est une constante. Notre densité du lagrangien relativiste est

$$\mathcal{L}_R = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{\mu}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\mu\nu}a_\rho + \big(D_\mu\psi\big)\big(D^\mu\psi\big)^* + a^\mu J^T{}_\mu + \tfrac{\gamma}{2c^2}\partial_\mu N\partial^\mu N - V. \tag{16.1}$$

Le vecteur lorentzien ${J^T}_\mu$ représente la généralisation relativiste du courant de transport chez Manton, c'est-à-dire ${J^T}_\mu \equiv \lim_{r\to\infty} J_\mu$; nous choisissons ${J^T}_\mu$ du genre temps, $\mathrm{I}^2 \equiv \frac{\gamma}{\mathrm{c}^2}\mathrm{J^T}_\mu\mathrm{J^{T\ \mu}} > 0$. Le potentiel est donné par

$$V = \frac{\beta}{2}\big(|\psi|^2 - 2|\mu|N - \frac{\mathrm{I}}{2\mathrm{m}\gamma}\big)^2 + \frac{\gamma}{c^2}\big(N + mc^2\big)^2|\psi|^2 - (N + mc^2)\mathrm{I}, \tag{16.2}$$

où $\beta > 0$.

Remarque: Même si le potentiel n'est pas positif, il ne pose pas de problème pour obtenir les conditions asymptotiques d'une configuration à énergie finie. Ce potentiel nous a été inspiré par une étude des articles [LLM], [DUN], [KL]. Il est construit de manière à obtenir des solutions "self–duales" et une limite non relativiste; certains de ces termes compenseront d'autres termes dans le reste de la densité lagrangienne et dans l'énergie.

Le lagrangien est bien sûr invariant par transformation de Lorentz comme somme d'invariants relativistes; les équations du mouvement associées sont, $(x^0 = t)$,

(16.3)

$$\begin{cases} D_\mu D^\mu\psi + \dfrac{\partial V}{\partial\psi^*} = 0, & \text{éq. non linéaire de Klein-Gordon} \\ \frac{\gamma}{c^2}\partial_0 F_{0i} + \epsilon_{ij}\partial_j F_{12} + 2\mu\epsilon_{ij}F_{0j} - J_i + {J^T}_i = 0, & \text{loi d'Ampère} \\ \frac{\gamma}{c^2}\partial_i F_{0i} + 2\mu F_{12} = \frac{\gamma}{c^2}\big(J_0 - {J^T}_0\big), & \text{loi de Gauss} \\ \frac{\gamma}{2c^2}\partial_\mu\partial^\mu N + \dfrac{\partial V}{\partial N} = 0 & \text{éq. auxiliaire pour N.} \end{cases}$$

Le courant relativiste est donné par $(\mu = 0, 1, 2)$

$$J_\mu = -i\Big((D_\mu\psi)\psi^* - (D_\mu\psi)^*\psi\Big),$$

et vérifie l'équation de conservation de la charge

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\lambda}{c^2}\partial_0 J_0 - \partial_k J_k = 0,$$

puisqu'on dispose d'une métrique qui nous permet de baisser ou monter les indices. Elle est obtenue à partir de la partie imaginaire de l'équation de Klein-Gordon, en écrivant le champ ψ sous la forme $\psi = fe^{i\omega}$.

16.1 *Energie et solutions statiques "auto-duales".*

On peut toujours choisir un référentiel de Lorentz dans lequel les composantes spatiales du courant de transport s'annulent, ${J^T}_\mu = (-\frac{c^2}{\gamma}\mathrm{I}, 0)$.

Dans un tel référentiel, l'énergie dont la densité est donnée par

$$h = \frac{\gamma}{c^2}\Big(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0\psi)}\partial_0\psi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0\bar{\psi})}\partial_0\bar{\psi} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0 N)}\partial_0 N + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0 a_\mu)}\partial_0 a_\mu\Big) - \mathcal{L}, \tag{16.4}$$

devient

$$\begin{aligned} H_R = \int \Big\{ & \tfrac{\gamma}{2c^2}\,\vec{E}^2 + \tfrac{1}{2}B^2 + \big|\vec{D}\psi\big|^2 + \tfrac{\gamma^2}{2c^4}\left(\partial_0 N\right)^2 + \tfrac{\gamma}{2c^2}\left(\vec{\nabla}N\right)^2 + V - \tfrac{\gamma}{c^2}\big|D_0\psi\big|^2 \\ & + \tfrac{\gamma}{c^2}\big(\partial_0\psi(D_0\psi)^* + (\partial_0\psi)^*(D_0\psi)\big) \\ & - a_0\big(\mu B + \tfrac{\gamma}{c^2}\partial_i E_i + \tfrac{\gamma}{c^2}J_0^T\big)\Big\}\, dxdy \\ & + \mu\int\left\{\partial_1(a_0 a_2) - \partial_2(a_0 a_1)\right\} dxdy + \tfrac{\gamma}{c^2}\int \partial_i(a_0 E_i)\, dxdy. \end{aligned}$$

En utilisant la loi de Gauss, la troisieme ligne de l'intégrale précédente devient $\frac{\gamma}{c^2}J_0 a_0$; en remarquant que

$$\big(\partial_0\psi(D_0\psi)^* + (\partial_0\psi)^*(D_0\psi)\big) - J_0 a_0 = 2\big|D_0\psi\big|^2,$$

et en supposant que les champs s'annulent suffisamment rapidement à l'infini, l'énergie devient

$$H_R = \int \Big\{ \tfrac{\gamma}{2c^2}\,\vec{E}^2 + \tfrac{1}{2}B^2 + \tfrac{\gamma}{c^2}\big|D_0\psi\big|^2 + \big|\vec{D}\psi\big|^2 + \tfrac{\gamma^2}{2c^4}\left(\partial_0 N\right)^2 + \tfrac{\gamma}{2c^2}\left(\vec{\nabla}N\right)^2 + V\Big\}\, d^2x. \tag{16.5}$$

On a posé $E_i = F_{0i}$ et $B = F_{12}$.

Pour obtenir des configurations à énergie finie, nous imposons $h \to 0$ suffisamment rapidement quand $r \to \infty$; cette condition n'est bien sûr pas nécessaire. Puisque

$$J_\mu = -i\Big((D_\mu\psi)\psi^* - (D_\mu\psi)^*\psi\Big), \tag{16.6}$$

et que dans notre référentiel

$${J^T}_0 = -\frac{c^2}{\gamma}\mathrm{I} \neq 0, \tag{16.7}$$

ni $|D_0\psi|$, ni $f = |\psi|$ ne peuvent tendre vers 0 à l'infini.

Remarquons que dans (16.5) tous les termes sont positifs excepté $-(N+mc^2)\mathrm{I}$; ce terme va jouer un rôle important pour annuler la densité d'énergie à l'infini. En effet on a, pour chaque valeur de μ et en posant $\psi = fe^{i\theta}$,

$$|D_\mu\psi|^2 f^2 = (\partial_\mu f)^2 f^2 + (\partial_\mu\theta - a_\mu)^2 f^4 = (\partial_\mu f)^2 f^2 + \Big(J_\mu/2\Big)^2;$$

la seconde égalité est établie à partir de l'expression de J_μ. A l'aide de cette égalité et de (16.7), on établit que la somme

$$\tfrac{\gamma}{c^2}\left|D_0\psi\right|^2 + V =$$

$$\tfrac{\gamma}{c^2}\left|D_0\psi\right|^2 + \frac{\gamma}{c^2}\big(N+mc^2\big)^2|\psi|^2 - (N+mc^2)\mathrm{I} + \frac{\beta}{2}\big(|\psi|^2 - 2|\mu|N - \frac{\mathrm{I}}{2\mathrm{m}\gamma}\big)^2$$

devient asymptotiquement

$$\frac{\gamma}{c^2}\Big(\partial_0 f\Big)_\infty^2 + \frac{\gamma}{c^2}\Big[f_\infty(N_\infty + mc^2) + \frac{J_0^T}{2f_\infty}\Big]^2 + \frac{\beta}{2}\Big[f_\infty^2 - 2|\mu|N_\infty - \frac{\mathrm{I}}{2m\gamma}\Big]^2.$$

Ici, N_∞ et f_∞ sont les valeurs asymptotiques des champs N et $f = |\psi|$. Ainsi, à l'infini spatial tous les termes de la densité d'énergie sont positifs; $lim_{r\to\infty}h = 0$ entraîne la nullité de tous les termes de la densité d'énergie h à l'infini spatial. En particulier, les termes de la somme $\frac{\gamma}{c^2}\left|D_0\psi\right|^2 + V$ s'annulent et on a

$$f_\infty^2 - 2|\mu|N_\infty - \frac{\mathrm{I}}{2m\gamma} = 0, \qquad f_\infty(N_\infty + mc^2) + \frac{J_0^T}{2f_\infty} = 0.$$

De ce système, on déduit l'équation, $2|\mu|N_\infty^2 + (2|\mu|mc^2 + \frac{\mathrm{I}}{2m\gamma})N_\infty = 0$, dont l'unique solution acceptable est $N_\infty = 0$; on a alors $f_\infty^2 = \dfrac{\mathrm{I}}{2m\gamma}$.

Pour obtenir des solutions à énergie finie, on demande donc les conditions asymptotiques suivantes:

$$(16.8) \qquad |\vec{E}| \to 0, \qquad B \to 0, \qquad |\vec{D}\psi| \to 0, \qquad |\psi|^2 \to \frac{\mathrm{I}}{2m\gamma}, \qquad N \to 0.$$

Il s'en suit que si notre système (16.3) admet des solutions à énergie finie avec une densité d'énergie nulle à l'infini, ces solutions représenterons des vortex topologiques. Pour trouver de telles configurations, nous réécrivons l'énergie en utilisant l'expression

$$(16.9) \qquad |D_0\psi|^2 = \left|D_0\psi + i(N+mc^2)\psi\right|^2 - \Big(N+mc^2\Big)^2|\psi|^2 - \Big(N+mc^2\Big)J_0;$$

on obtient alors

$$H_R = \int \Big\{ \tfrac{\gamma}{2c^2}\,\vec{E}^2 + \tfrac{1}{2}B^2 + \big|\vec{D}\psi\big|^2 + \tfrac{\gamma^2}{2c^4}\big(\partial_0 N\big)^2 + \tfrac{\gamma}{2c^2}\big(\vec{\nabla}N\big)^2 + \tfrac{\gamma}{c^2}\big|D_0\psi + i(N+mc^2)\psi\big|^2$$
$$- \tfrac{\gamma}{c^2}(N+mc^2)(J_0 - J_0^T) + \frac{\beta}{2}\Big(|\psi|^2 - 2|\mu|N - \frac{\mathrm{I}}{2m\gamma}\Big)^2\Big\}\, d^2x.$$

En utilisant la loi de Gauss, on a

$$H_R = \int \Big\{ \tfrac{\gamma}{2c^2}\,\vec{E}^2 + \tfrac{1}{2}B^2 + \big|\vec{D}\psi\big|^2 + \tfrac{\gamma^2}{2c^4}\big(\partial_0 N\big)^2 + \tfrac{\gamma}{2c^2}\big(\vec{\nabla}N\big)^2 + \tfrac{\gamma}{c^2}\big|D_0\psi + i(N+mc^2)\psi\big|^2$$
$$- \Big(\tfrac{\gamma}{c^2}\partial_i E_i + 2\mu B\Big)(N+mc^2) + \frac{\beta}{2}\Big(|\psi|^2 - 2|\mu|N - \frac{\mathrm{I}}{2m\gamma}\Big)^2\Big\} d^2x,$$

puis l'identité de Bogomolny' (13.6), on obtient pour la valeur particulière $\beta = 1$

$$\begin{aligned} H_R = \int \Big\{ & \tfrac{\gamma}{2c^2}\big[\vec{E} + \vec{\nabla}N\big]^2 + \tfrac{1}{2}\big[B + \epsilon(|\psi|^2 - 2|\mu|N - \frac{\mathrm{I}}{2m\gamma})\big]^2 \\ & + \tfrac{\gamma}{c^2}\big|D_0\psi + i(N+mc^2)\psi\big|^2 + \big|(D_1 + i\epsilon D_2)\psi\big|^2 + \tfrac{\gamma^2}{2c^4}\big[\partial_0 N\big]^2\Big\}\, d^2x \\ & - \epsilon\big(2|\mu|mc^2 - \frac{\mathrm{I}}{2m\gamma}\big)\underbrace{\int B\, d^2x}_{\text{flux}}, \end{aligned} \tag{16.10}$$

où ϵ est le signe de μ. Le dernier terme est topologique: par les conditions asymptotiques (16.8), le flux est quantifié, égal à $2\pi n$ (n étant le "winding number" de ψ). A cause de la présence de c^2, on peut raisonnablement supposer que le facteur devant le flux est positif. Ainsi, choisissant respectivement $n < 0$ pour $\epsilon > 0$ et $n > 0$ pour $\epsilon < 0$, l'énergie admet un minimum positif

$$H_R \geq \big(2|\mu|mc^2 - \frac{\mathrm{I}}{2m\gamma}\big)\, 2\pi|n|. \tag{16.11}$$

Le minimum absolu de l'énergie est atteint par des configurations solutions des équations de Bogomolny

$$\begin{cases} \partial_0 N = 0, \\ \vec{\nabla}N + \vec{E} = 0, \\ D_0\psi + i(N+mc^2)\psi = 0, \\ \big(D_1 + i\epsilon D_2\big)\psi = 0, \\ B = \epsilon\big(\frac{\mathrm{I}}{2m\gamma} - |\psi|^2 + 2|\mu|N\big). \end{cases} \tag{16.12}$$

Ces équations sont similaires à celles obtenues par Lee et al., et peuvent être étudiées numériquement [LLM]. Comme on pouvait s'y attendre le système est statique à une jauge près: en effet si on redéfinit a_0 comme $\tilde{a_0} = a_0 - \partial_t arg\,\psi$, alors

$$\tilde{a_0} = N + mc^2, \qquad \partial_t|\psi| = 0,$$

et le système se réduit à

$$\begin{cases} \tilde{a_0} = N + mc^2, \\ \big(D_1 + i\epsilon D_2\big)\psi = 0, \\ B = \epsilon\big(\dfrac{\mathrm{I}}{2m\gamma} - |\psi|^2 + 2|\mu|N\big). \end{cases} \tag{16.13}$$

Les solutions de ce système sont des solutions des équations du deuxième ordre (16.3), puisqu'elles sont statiques et minimisent l'énergie.

16.2 *Limite non relativiste.*

Nous montrons maintenant que la limite non relativiste du modèle (16.1-16.2) est celui de Manton et que les équations auto-duales (16.12) tendent vers le équations galiléennes (13.10), (13.11) et la contrainte de Chern–Simons non-relativiste. Tout ceci est rendu possible par l'équation auxiliaire dans (16.3) qui, à la limite non relativiste, introduit une contrainte entre les champs N et ϕ. Par limite non-relativiste, nous entendons:

1. faire un choix entre les indices contravariants et les indices covariants car, en physique galiléenne, l'absence de métrique ne permet pas de monter ou descendre les indices;

2. poser

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-imc^2 t}\,\phi; \tag{16.14}$$

3. faire tendre c vers $+\infty$.

Avec les deux premières conditions et la métrique $(c^2/\gamma, -1, -1)$, on établit la suite d'égalités:

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{\gamma}{2c^2}\sum_{i=1}^{2} E_i^2 + \frac{1}{2}B^2, \qquad \big(D_k\psi\big)\big(D^k\psi\big)^* = \frac{1}{2m}\big(D_k\psi\big)\big(D_k\psi\big)^*, \tag{16.15}$$

$$\big(D_0\psi\big)\big(D^0\psi\big)^* = \frac{\gamma}{2mc^2}(D_t\phi)(D_t\phi)^* + \frac{\gamma mc^2}{2}|\phi|^2 + \frac{\gamma i}{2}\Big((D_t\phi)\phi^* - \phi(D_t\phi)^*\Big), \tag{16.16}$$

et

$$
\begin{aligned}
J_k &= \frac{1}{2mi}\Big((D_k\phi)\phi^* - (D_k\phi)^*\phi\Big),\\
\frac{\gamma}{c^2}J_0 &= -\gamma|\phi|^2 + \frac{i\gamma}{2mc^2}\Big((D_t\phi)\phi^* - \phi(D_t\phi)^*\Big),
\end{aligned}
\tag{16.17}
$$

d'où on déduit, puisque $J^T{}_\mu = \lim_{r\to\infty} J_\mu$ et en utilisant (16.8),

$$
\lim_{c\to\infty} J^T{}_0/c^2 = -\lim_{r\to\infty}|\phi|^2 = -\lim_{c\to\infty}\frac{\mathrm{I}}{\gamma} \equiv -\alpha.
\tag{16.18}
$$

Le lagrangien relativiste devient alors, lorsqu'on fait tendre c vers l'infini et qu'on néglige le terme constant $mc^2\mathrm{I}$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{NR} = &-\frac{1}{2}B^2 + \gamma\frac{i}{2}\big(\phi^* D_t\phi - \phi(D_t\phi)^*\big) - \frac{1}{2m}\big|\vec{D}\phi\big|^2\\
&+ \mu\big(Ba_t + E_2a_1 - E_1a_2\big) - \gamma a_t - \vec{a}\cdot\vec{J}^T\\
&- \Big\{\frac{\beta}{8m}\big(\alpha - |\phi|^2 + 4m|\mu|N\big)^2 - \gamma\big(\alpha - |\phi|^2\big)N\Big\}.
\end{aligned}
\tag{16.19}
$$

Remarquons qu'il n'y a plus de terme cinétique en N. Il peut donc être éliminé au profit du champ ϕ; en effet l'équation du mouvement associée à N dans (16.3) devient la contrainte (quand $c \to +\infty$)

$$
4\mu^2\beta N = \big(\gamma - \frac{|\mu|\beta}{m}\big)\big(\alpha - |\phi|^2\big).
\tag{16.20}
$$

Quand on l'insère dans le potentiel, le lagrangien non relativiste devient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{NR} = &-\frac{1}{2}B^2 + \gamma\frac{i}{2}\big(\phi^* D_t\phi - \phi(D_t\phi)^*\big) - \frac{1}{2m}\big|\vec{D}\phi\big|^2\\
&+ \mu\big(Ba_t + E_2a_1 - E_1a_2\big) - \gamma a_t - \vec{a}\cdot\vec{J}^T\\
&- \big(\frac{\gamma}{4|\mu|m} - \frac{\gamma^2}{8\mu^2\beta}\big)\big(\alpha - |\phi|^2\big)^2,
\end{aligned}
\tag{16.21}
$$

qui est exactement celui de Manton avec $\alpha = 1$, $m = 1$ et

$$
\lambda = \frac{2\gamma}{|\mu|} - \frac{\gamma^2}{\mu^2\beta}.
\tag{16.22}
$$

On aurait pu aussi obtenir la limite non relativiste à partir des équations du mouvement:

1. dans la loi d'Ampère, le premier terme $\frac{\gamma}{c^2}\partial_0 F_{0i}$ s'annule quand $c \to +\infty$ et le courant non relativiste est $\vec{J} = (1/2i)\big(\phi^*\vec{D}\phi - \phi(\vec{D}\phi)^*\big)$;

2. dans la loi de Gauss, le premier terme $\frac{\gamma}{c^2}\partial_i F_{0i}$ s'annule et, d'après (16.17), les composantes temporelles des courants deviennent

$$\lim_{c\to\infty} J_0/c^2 = -|\phi|^2, \qquad \text{et} \qquad \lim_{c\to\infty} J^T{}_0/c^2 = -\alpha = -1.$$

3. dans l'équation auxiliaire, le premier terme $(\gamma/c^2)\partial_\mu\partial^\mu N$ s'annule aussi, et la limite de $\partial V/\partial N$ quand $c \to +\infty$ est exactement (16.20).

4. enfin quand on injecte dans l'équation de Klein-Gordon, les expressions

$$\begin{aligned} D_0 D^0\psi =& \frac{\gamma}{\sqrt{2m}c^2}\Big(\partial_{tt}\phi - i(\partial_t a_0)\phi - 2ia_0(\partial_t\phi) - a_0^2\phi\Big)\exp(-imc^2t) \\ & - i\gamma\sqrt{2m}(D_t\phi)\exp(-imc^2t) - \frac{\gamma}{\sqrt{2m}}m^2c^2\phi\exp(-imc^2t), \end{aligned} \tag{16.23}$$

$$D_k D^k\psi = -\frac{1}{\sqrt{2m}}D_k^2\phi\exp(-imc^2t),$$

et (16.20) on obtient, quand $c \to +\infty$, l'équation de Schrödinger; le terme en c^2 est compensé par le même terme issu de $\partial V/\partial\bar\psi$.

Disons, enfin, un mot sur les équations auto-duales: pour la valeur particulière $\beta = 1$, c'est-à-dire quand λ dans (16.22) devient (13.8), la limite non relativiste des équations (16.12) devient

$$\begin{cases} a_0 = N = \Big(-\dfrac{\epsilon}{4\mu} + \dfrac{\gamma}{4\mu^2}\Big)(1 - |\phi|^2), \\ (D_1 + i\epsilon D_2)\phi, \\ 2\mu B = \gamma\Big(1 - |\phi|^2\Big); \end{cases} \tag{16.24}$$

ce sont les équations "self-duales" du cas non relativiste.

17. VORTEX SPINORIELS. [HHY1]

Dans leur modèle, Duval et al. [DHP1] décrivent un champ de spin $\frac{1}{2}$ non relativiste en dimension $2+1$ par une version non-relativiste de l'équation de Dirac

$$\begin{cases} (\vec\sigma\cdot\vec D)\Phi + 2m\chi = 0, \\ D_t\Phi + i(\vec\sigma\cdot\vec D)\chi = 0, \end{cases} \tag{17.1}$$

où Φ et χ sont des spineurs à deux composantes et $(\vec\sigma\cdot\vec D) = \sum_{j=1}^2 \sigma^j D_j$, σ^j étant les matrices de Pauli. Ces spineurs sont couplés avec un champ de jauge de Chern-Simons par les équations champs-courant

$$\kappa B \equiv \kappa\epsilon^{ij}\partial_i A^j = -\varrho, \qquad \kappa E^i \equiv -\kappa(\partial_i A^0 + \partial_t A^i) = \epsilon^{ij}J^j, \tag{17.2}$$

où la densité de masse et le courant sont respectivement donnés par

$$\varrho = |\Phi|^2, \qquad \vec{J} = i(\Phi^\dagger \vec{\sigma}\chi - \chi^\dagger \vec{\sigma}\Phi). \tag{17.3}$$

En utilisant (17.1), le courant devient

$$\vec{J} = \frac{1}{2mi}\Big(\Phi^\dagger \vec{D}\Phi - (\vec{D}\Phi)^\dagger \Phi\Big) + \vec{\nabla} \times \Big(\frac{1}{2}\Phi^\dagger \sigma_3 \Phi\Big). \tag{17.4}$$

En utilisant l'identité $(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})^2 = \vec{D}^2 + B\sigma_3$ et les équations (17.2), les spineurs Φ et χ satisfont au système

$$\begin{cases} iD_t\Phi = [-\frac{1}{2}\vec{D}^2 + \frac{1}{2\kappa}|\Phi|^2\sigma_3]\Phi, \\ iD_t\chi = [-\frac{1}{2}\vec{D}^2 + \frac{1}{2\kappa}|\Phi|^2\sigma_3]\chi - \frac{1}{2\kappa}(\vec{\sigma}\times\vec{J})\chi. \end{cases} \tag{17.5}$$

Puisque $\chi = -(1/2m)(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\Phi$, on peut ramener la résolution du système (17.1) + (17.2) à celle du nouveau système

$$\begin{cases} [-\frac{1}{2}(\vec{D}^2 + B\sigma) - A_t]\Phi = 0, \\ \vec{J} = \kappa\vec{\nabla}\times A_t, \\ \kappa B = -\varrho \end{cases} \tag{17.6}$$

Ce système admet des solutions self-duales purement magnétiques [DHP1].

Nous généralisons le modèle de Duval et al. à un modèle Maxwell-Chern-Simons non relativiste du même type que celui de Manton. Le résultat nouveau ici est l'existence de solutions non purement magnétiques.

Posons les équations suivantes du mouvement:

$$\begin{cases} i\gamma D_t\Phi = -\frac{1}{2}\big[\vec{D}^2 + B\sigma_3\big]\Phi & \text{équa. de Pauli} \\ \epsilon_{ij}\partial_j B = J_i - J_i^T + 2\mu\,\epsilon_{ij}\,E_j & \text{équa. d'Ampère} \\ 2\mu B = \gamma\big(1 - |\Phi|^2\big) & \text{loi de Gauss} \end{cases} \tag{17.7}$$

où le courant est toujours donné par (17.4) avec $m = 1$.

Ces équations dérivent de la densité lagrangienne

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &-\frac{1}{2}B^2 + \frac{i\gamma}{2}\big[\Phi^\dagger(D_t\Phi) - (D_t\Phi)^\dagger\Phi\big] - \frac{1}{2}(\vec{D}\Phi)^\dagger(\vec{D}\Phi) \\ &+ \frac{B}{2}\Phi^\dagger\sigma_3\Phi + \mu\big(Ba_t + E_2a_1 - E_1a_2\big) - \gamma a_t - \vec{a}\cdot\vec{J}^T. \end{aligned} \tag{17.8}$$

Le système est non relativiste et admet des solutions "self-duales" de type vortex, comme nous le montrons maintenant. Nous nous plaçons dans un référentiel où le courant de transport est nul; il peut être atteint par un "boost" galiléen. Pour les champs qui sont statiques dans ce référentiel, les équations du mouvement deviennent

$$\text{(17.9)} \qquad \begin{cases} \big[\frac{1}{2}(\vec{D}^2 + B\sigma_3) + \gamma a_t\big]\Phi = 0, \\ \vec{\nabla} \times B = \vec{J} + 2\mu\, \vec{\nabla} \times a_t, \\ 2\,\dfrac{\mu}{\gamma} B = 1 - \Phi^\dagger \Phi. \end{cases}$$

Comme d'habitude, essayons de résoudre le système par l'Ansatz "self-dual" du premier ordre

$$\text{(17.10)} \qquad \big(D_1 \pm iD_2\big)\Phi = 0.$$

Alors

$$\text{(17.11)} \qquad \vec{D}^2\Phi = \mp B\Phi \qquad \text{et} \qquad \vec{J} = \tfrac{1}{2}\vec{\nabla} \times \Big[\Phi^\dagger(\mp 1 + \sigma_3)\Phi\Big],$$

ainsi l'équation statique de Pauli devient

$$\text{(17.12)} \qquad \Big[(\mp 1 + \sigma_3)B + 2\gamma a_t\Big]\Phi = 0.$$

Décomposons Φ en composantes chirales,

$$\text{(17.13)} \qquad \Phi = \Phi_+ + \Phi_-, \qquad \text{où} \qquad \Phi_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Phi_- = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors (17.12) devient

$$\text{(17.14)} \qquad -B\Phi_+ = \gamma a_t \Phi, \qquad B\Phi_- = \gamma a_t \Phi,$$

respectivement pour le signe supérieur et le signe inférieur. Une solution possible est $\Phi_+ = 0$ pour le signe supérieur et $\Phi_- = 0$ pour le signe inférieur, comme dans [DHP1]. Dans les deux cas, a_t s'annule, ce qui est incompatible avec la loi d'Ampère.

Curieusement, il existe une autre possibilité: on peut avoir

$$\text{(17.15)} \qquad a_t = \pm\tfrac{1}{\gamma}\, B \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{lll} \Phi_- = 0 & \text{i.e. } \Phi \equiv \Phi_+ & \text{pour le signe sup.} \\ \Phi_+ = 0 & \text{i.e. } \Phi \equiv \Phi_- & \text{pour le signe inf.} \end{array}.$$

Dans ce cas $\vec{J} = \mp\vec{\nabla} \times \big|\Phi_\pm\big|^2$, si bien que la loi d'Ampère devient

$$\text{(17.16)} \qquad \vec{\nabla} \times \Big(\big[1 \mp \tfrac{2\mu}{\gamma}\big]B \pm \big|\Phi_\pm\big|^2\Big) = 0.$$

Mais maintenant $\big|\Phi_\pm\big|^2 = \big|\Phi\big|^2$, égal à $1-(2\mu/\gamma)B$ selon la loi de Gauss, de telle sorte que (17.16) est vrai quand

$$\alpha \equiv \pm\frac{\gamma}{\mu} = 4. \tag{17.17}$$

En conclusion, pour la valeur particulière (17.17), les équations du second ordre (17.9) peuvent être résolues en résolvant l'une ou l'autre des équations du premier ordre (17.10). Ces dernières fixent la jauge comme

$$\vec{a} = \pm\tfrac{1}{2}\vec{\nabla}\times\ln\varrho, \qquad \varrho \equiv \big|\Phi\big|^2 = \big|\Phi_\pm\big|^2. \tag{17.18}$$

La loi de Gauss donne alors

$$\triangle \ln\varrho = 4(\varrho - 1), \tag{17.19}$$

qui est encore une équation du type Liouville. Notons qu'ici le coefficient — le même quelque soit le choix du signe — est automatiquement positif et égal à 4.

18. COMPARAISON AVEC D'AUTRES MODELES. [HHY1]

A. Pour décrire des vortex topologiques ($\lim_{r\to\infty}|\phi| = 1$) en théorie de Chern-Simons, A. Barashenkov et Harin [BH] ont proposé le modèle suivant

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \frac{1}{2}E^2 - \frac{1}{2}B^2 + \frac{i}{2}\big(\phi^* D_t\phi - \phi(D_t\phi)^*\big) - \frac{1}{2}\big|\vec{D}\phi\big|^2 - \frac{\lambda}{8}\big(1-|\phi|^2\big)^2 \\ & + \mu\big(Ba_t + E_2a_1 - E_1a_2\big) - \gamma a_t.\end{aligned} \tag{18.1}$$

Ce lagrangien diffère de celui de Manton uniquement par la présence du terme entier de Maxwell, alors que le terme de transport $\vec{J}^T.\vec{a}$ est absent. Ainsi ce modèle n'a pas de symétrie bien définie: le terme de Maxwell est un invariant de Lorentz; le terme de matière est un invariant de Galilée; le terme de Chern-Simons possède les deux invariances précédentes. Enfin, le terme $-\gamma.a_t$ brise aussi bien l'invariance galiléenne que relativiste.

L'énergie du modèle (18.1) est donnée par

$$H = \int\Big\{\tfrac{1}{2}\vec{E}^2 + \tfrac{1}{2}B^2 + \tfrac{1}{2}\big|\vec{D}\phi\big|^2 + \frac{\lambda}{8}\big(1-|\phi|^2\big)^2\Big\}\,d^2\vec{x}, \tag{18.2}$$

et la contrainte de Gauss par

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - 2\mu B - |\phi|^2 + \gamma = 0. \tag{18.3}$$

Ici la présence des termes $\vec{E}^2$ dans l'énergie et $\vec{\nabla}.\vec{E}$ dans la loi de Gauss permet uniquement, comme c'est le cas dans d'autres modèles relativistes, un champ électrique nul [JU], à moins qu'un champ auxiliaire neutre ne soit ajouté [LLM],[DT]. C'est précisément l'absence de ces termes électriques — absence due à l'aspect galiéen de la théorie — qui laisse la porte ouverte à l'existence de solutions avec un champ électrique non nul dans le modèle de Manton.

B. Mentionnons aussi qu'un modèle non relativiste couplant l'électrodynamique de Chern-Simons et celle de Maxwell a déja été considéré dans une approche géométrique du type "Kaluza-Klein" [DHP2]. On pose les équations couplées dans une théorie Maxwell-Chern-Simons dans un espace relativiste dit de Bargmann et de dimension 3+1. Quand on réduit cette théorie dans l'espace précédent quotienté par les courbes intégrales d'un vecteur genre-lumière et de dérivée covariante nulle, le nouvel espace étant de dimension 2+1, on obtient le système suivant d'équations du mouvement non relativistes

$$\begin{cases} iD_t\phi = -\dfrac{1}{2}\vec{D}^2\phi + \dfrac{\delta U}{\delta\phi^*}, \\ \epsilon_{ij}\partial_j B = J_i + 2\mu\,\epsilon_{ij}\,E_j, \\ 2\mu B = -|\phi|^2. \end{cases} \tag{18.4}$$

Notons l'absence du courant de transport dans la loi d'Ampère; la loi de Gauss a la même forme que celle du modèle de Jackiw-Pi. Le système précédent peut être résolu de la même manière que celui de Manton; l'équation self-duale et la loi de Gauss,

$$\begin{aligned} &(D_1 \pm iD_2)\phi = 0, \\ &2\mu B = -|\phi|^2, \end{aligned} \tag{18.5}$$

résolvent les équations du champ pourvu que le potentiel soit

$$U(\phi) = -\frac{\lambda}{8}\,|\phi|^4, \qquad \lambda \equiv \tfrac{1}{\mu^2} \mp \tfrac{2}{\mu}. \tag{18.6}$$

Alors, en insérant

$$\vec{a} = \pm\tfrac{1}{2}\vec{\nabla} \times \ln\varrho + \vec{\nabla}\omega \qquad \text{et} \qquad a_t = \tfrac{1}{4}\big(\pm\tfrac{1}{\mu} - \tfrac{1}{\mu^2}\big)\varrho, \tag{18.7}$$

dans la loi de Gauss, on obtient l'équation de Liouville,

$$\triangle \ln\varrho = \pm\frac{1}{\mu}\,\varrho.$$

Les solutions régulières sont obtenues quand le second membre est négatif. Ainsi on a le signe supérieur pour $\mu < 0$ et le signe inférieur pour $\mu > 0$. Quelque soit le signe, la densité de particule $\varrho = |\psi|^2$ satisfait finalement à

$$\triangle \ln \varrho = -\frac{1}{|\mu|}\,\varrho, \tag{18.8}$$

qui est exactement le problème résolu par Jackiw et Pi dans leur théorie Chern-Simons pur. Notons enfin que $\lambda = 1/\mu^2 \pm 2/\mu$ est toujours positif si bien que le potentiel (18.6) est attractif.

Le même résultat put être obtenu par l'énergie du système, soit

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2}\left|\vec{D}\phi\right|^2 - \frac{g}{2}|\phi|^4 \right\} d^2\vec{x}, \qquad g = \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{4\mu^2}, \tag{18.9}$$

qui est de la forme de celle de Jackiw-Pi, l'unique effet du terme de Maxwell étant le shift, $\lambda \to \lambda - 1/\mu^2$, dans le coefficient non linéaire.

Notons que le système (18.4) admet tout le groupe de Shrödinger comme groupe de symétrie pour le potentiel (18.6) [DPH2].

BIBLIOGRAPHIE.

[CH] S. S. Chern, *Complex Manifolds without Potential Theory*, second edition, Springer–Verlag (1979).

[JTE] R. Jackiw, S. Templeton, *How super–renormalizable interactions cure their infrared divergences*, *Phys. Rev.* **D 23**, 2291 (1981).

[SC] J. F. Schonfeld, *A mass term for three-dimensional gauge fields*, *Nucl. Phys.* **B 185**, 157 (1981).

[HA1] C. R. Hagen, *A new gauge theory without an elementary photon*, *Ann. Phys.* (N. Y.) **157**, 342 (1984).

[DJT] S. Deser, R. Jackiw et S. Templeton, *Three-dimensional massive gauge theories*, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 975 (1982).

[LP] E. M. Lifshitz et L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics*, Part 2, in *Landau and Lifshitz Course of Theorical Physics*, vol. 9 Butterworth–Heinemann (1995).

[DG] P. G. de Gennes, *Superconductivity of metals and alloys*, Benjamin (1966).

[NO] H. B. Nielsen et P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, *Nucl. Phys.* **B 61**, 45 (1973).

[BOG] E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*, *Sov. J. Nuc. Phys.* **24**, 449 (1976).

[WE] E. J. Weinberg, *Multivortex solutions of the Ginzburg-Landau equations*, *Phys. Rev.* **D 19**, 3008 (1979).

[JT] A. Jaffe et C.H. Taubes, *Vortices and Monopoles*, Birkhauser (1980).

[FAD] L. D. Faddaev, L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer–Verlag (1987).

[JZ] B. Julia et A. Zee, *Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory*, *Phys. Rev.* **D 11**, 2227 (1975).

[PK] K. Paul et A. Khare, *Charged vortices in an abelian Higgs model with Chern–Simons term*, *Phys. Rev.* **B 174** (1986).

[HA2] C. R. Hagen, *Galilean-invariant gauge theory*, *Phys. Rev.* **D 31**, 848 (1985).

[JP1] R. Jackiw and S.-Y. Pi, *Soliton solutions to the gauged nonlinear Schrödinger equation on the plane*, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2969 (1990); *Classical and quantal non-relativistic Chern-simons theory*, *Phys. Rev.* **D 42**, 3500 (1990).

[JP2] R. Jackiw and S.-Y. Pi, *Self-dual Chern-Simons solitons*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **107**, 1 (1992).

[BBS] L. Bergé, A. de Bouard et J. C. Saut, *Collapse of Chern-Simons-Gauged Matter Fields Phys. Rev. Lett.* **74**, 3907, (1995). Voir aussi *Blowing up of time-dependent solutions of the planar, Chern–Simons gauged nonlinear Schrödinger equation*, *Nonlinearity* **8**, 235 (1995).

[NI] U. Niederer, *The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation*, *Helvetica Physica Acta* **45**, 802 (1972).

[TA] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, John Wiley and Sons (1989).

[REB] C. Rebbi et G. Soliani, *Solitons and Particles*, *World Scientific* (1984).

[WA] R. S. Ward, *Integrable and solvable systems, and relations among them*, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A 315**, 117 (1985).

[MS] L. J. Mason et G. A. J. Sparling, *Nonlinear Schrödinger and Korteweg de Vries are reduction of self–dual Yang–Mills*, *Phys. Lett.* **A 137**, 29 (1989).

[AGJPS] U. Aglietti, L. Griguolo, R. Jackiw, S.-Y. Pi and D. Seminara, *Anyons and chiral solitons on a line*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4406 (1996). R. Jackiw, *A nonrelativistic chiral soliton in one dimension*, *J. Non. Lin. Math. Phys.* **4**, 241 (1997). Voir aussi: M. Hassaine, P. A. Horvathy and J.-C. Yera, "Edge solitons in the QHE," hep-th/0411117.

[HY] P. Horváthy, J. C. Yéra, *Bäcklund Transformation for Non-relativistic Chern–Simons Vortices*, *Phys. Rev.* **D 54**, 4171 (1996).

[KSY] S. K. Kim, K. S. Soh et J. H. Yee, *Index theory for the nonrelativistic Chern–Simons solitons*, *Phys. Rev.* **D 42**, 4139 (1990).

[HHY1] M. Hassaïne, P. Horváthy, J. C. Yéra, *Non-relativistic Maxwell-Chern–Simons Vortices*, *Ann. Phys. (N. Y.)* **263**, 276 (1998).

[MAN] N. Manton, *First order vortex dynamics*, *Ann. Phys. (N. Y.)*. **256**, 114 (1997).

[HH1] M. Hassaine and P. A. Horvathy, "The Symmetries of the Manton superconductivity model," J. Geom. Phys. **34** (2000) 242 [math-ph/9909025].

[DUN] G. Dunne, *Self-Dual Chern-Simons Theories*. Springer Lecture Notes in Physics; New Series: Monograph 36. (1995).

[DH-Rev] C. Duval and P. A. Horvathy, "Chern-Simons vortices," Contemp. Math. **203** (1997) 271 [hep-th/0307025].

[LLM] C. Lee, K. Lee, H. Min, *Self-dual Maxwell Chern-Simons solitons*, *Phys. Lett.* **B 252**, 79 (1990).

[DHP1] C. Duval, P. A. Horváthy and L. Palla, *Spinor vortices in non-relativistic Chern-Simons theory*, *Phys. Rev.* **D 52**, 4700 (1995); *Spinors in non-relativistic Chern-Simons electrodynamics*, *Ann. Phys.* (N. Y.) **249**, 265 (1996); P. A. Horvathy, "Hopf instantons, Chern-Simons vortices, and Heisenberg ferromagnets," J. Phys. A **34** (2001) 3079 [hep-th/0011210].

[BH] I. Barashenkov and A. Harin, *Nonrelativistic Chern–Simons theory for the repulsive Bose gas*, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1575 (1994); *Topological excitations in a condensate of nonrelativistic bosons coupled to Maxwell and Chern-Simons fields*, *Phys. Rev.* **D 52**, 2471 (1995).

[HHY2] M. Hassaïne, P. Horváthy, J. C. Yéra, *Vortices in the Landau-Ginzburg Model of the Quantized Hall Effect*, *J. Phys. A* **31** (1998) 9073 [hep-th/0303100].

[ZHK] Zhang, T. H. Hansson, S. Kivelson, *Effective-field-theory model for the fractional quantum Hall effect*, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 307 (1989).

[BMS] A. P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam, A. Stern, *Classical topology and quantum states*, World Scientific (1991).

[DRA] P. G. Drazin et R. S. Johnson, *Solitons: an introduction*, Cambridge Texts in Applied Mathematics (1990).

[AB] A. A. Abrikosov, *On the magnetic properties of superconductors of the second group*, *Soviet Physics JETP*, **5**, 1174 (1957).

[GIR] S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, édité par R.E. Prange et S. M. Girvin (Springer–Verlag, N.Y. 1986), Chap. 10. Voir aussi S. M. Girvin et A.-H. MacDonald, *Off-diagonal long-range order, oblique confinement, and the fractional quantum Hall effect*, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 303 (1987).

[BLU] G. W. Bluman et S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Springer–Verlag (1989).

[FM] P. Forgács and N. Manton, *Space-time symmetries in gauge theories*, *Commun. Math. Phys.* **72**, 15 (1980). Une définition similaire de la symétrie existe dans R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1635 (1979). Les lois de conservation associées sont étudiées dans [JM] R. Jackiw and N. Manton, *Symmetries and conservation laws in gauge theories*, *Ann. Phys.* (N. Y.) **127**, 257 (1980). Voir aussi R. Jackiw, *Symmetry and periodicity in gauge theory Acta Physica Austr.* (Suppl.) **22**, 383 (1980).

[NI] U. Niederer, *The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation*, *Helvetica Physica Acta* **45**, 802 (1972).

[CHW] B. Champagne, W. Hereman, P. Winternitz, *Comp. Phys. Commun.* **66**, 319 (1991).

[LL] J.-M. Lévy-Leblond, *Galilei group and Galilean invariance*, in *Group Theory and Applications* (Loebl Ed.), **II**, Acad. Press, New York (1972), 222.

[BA] O. Barut, *Nonlinear Equations in Physics and Mathematics*, D. Reidel Publishing Company (1978).

[HOP] J. Hoppe, *Lectures on Integrable Systems* dans *Lectures Notes in Physics* **m 10**, Springer–Verlag (1992).

[ARS] M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, *Connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type*, *J. Math. Phys.* **21**, 715 (1980).

[MO] J. B. McLeod et P. J. Olver, *The connection between partial differential equations soluble by inverse scattering and ordinary differential equations of Painlevé Type*, *Siam J. Math. Anal.* **14**, 448 (1983).

[HI] E. Hille, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley, London (1968).

[WA] R. S. Ward, *Integrable and solvable systems, and relations among them*, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A 315**, 451 (1985).

[WTC] J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale, *The Painlevé property for partial differential equations*, *J. Math. Phys.* **24**, 522 (1983).

[W1] J. Weiss, *The Painlevé property for partial differential equations.* II*: Bäcklund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivate*, *J. Math. Phys.* **24**, 1405 (1983). J. Weiss, *On classes of integrable systems and the Painlevé property*, *J. Math. Phys.* **25**, 13 (1984).

[TA] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, John Wiley and Sons (1989).

[W2] Appendice B du premier article de [W1]. J. Weiss, *Bäcklund transformation and the Painlevé property*, *J. Math. Phys.* **27**, 1293 (1986).

[ClaCo] P. A. Clarkson et C. M. Cosgrove, *Painlevé analysis of the non–linear Schrödinger family of equations*, *J. Phys.* **A**: *Math. Gen.* **20**, 2003 (1987).

[CLL] H. H. Chen, Y. C. Lee et C. S. Liu, *Integrability of nonlinear hamiltonian systems by inverse scattering method*, *Physica Scripta* **20**, 490 (1979).

[W3] J. Weiss, *The Painlevé property and Bäcklund transformation for the sequence of Boussinesq equations*, *J. Math. Phys.* **26**, 258 (1985).

[HYIJTP] "The non-linear Schrödinger equation and the conformal properties of non-relativistic space-time,"
Int. J. Theor. Phys. **48** (2009) 3139 [math-ph/9903001 [MATH-PH]].

[LLB] M. Le Bellac et J.-M. Lévy-Leblond, *Galilean electromagnetism*, *Il Nuovo Cimento* **14 B**, 217 (1973).

[LVW] D. Lévy, L. Vinet, P. Winternitz, *Symmetries and conditional symmetries of a non-relativistic Chern-Simons system*, *Ann. Phys.* **230**, 101 (1994).

[KNP] M. Knecht, R. Pasquier and J. Y. Pasquier, *Painlevé analysis and integrability properties of a 2+1 non relativistic field theory*, *J. Math. Phys.* **36**, 4181 (1995).

[KSY] S. K. Kim, K. S. Soh, and J. H. Yee, *Index theory for the nonrelativistic Chern-Simons solitons*, *Phys. Rev.* **D 42**, 4139 (1990).

[W] E. Weinberg, *Multivortex solutions of the Landau-Ginzburg equations*, *Phys. Rev.* **D 19**, 3008 (1979).

[THOR] J. A. Thorpe, *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer–Verlag - (1979).

[AHL] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis: an Introduction of the theory of Analytic Functions of One Complex variable*, Mc Graw-Hill, Inc. (1966).

[HYH] P. A. Horvathy and J. C. Yera, "Vortex solutions of the Liouville equation," Lett. Math. Phys. **46** (1998) 111 [hep-th/9805161]; P. A. Horvathy, "Topology of nontopological Chern-Simons vortices," Lett. Math. Phys. **49** (1999) 67 [hep-th/9903116].

[CART] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Sixième Edition, Hermann (1985).

[WHITT] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, The Macmillan Company, New–York (1944).

[EHI] Z. F. Ezawa, M. Hotta and A. Iwazaki, *Nonrelativistic Chern-Simons vortex solitons in external in external magnetic field*, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 411 (1991); *Nonrelativistic*

Chern–Simons vortex solitons in external magnetic field Phys. Rev. **D 44**, 452 (1991). On pourra voir aussi R. Jackiw and S-Y. Pi, *Semiclassical Landau levels of anyons*, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 415 (1991); *Time–dependent Chern–Simons solitons and their quantization*, *Phys. Rev.* **D 44**, 2524 (1991); M. Hotta, *Imported symmetry and two breathing modes in Chern-Simons theory with external magnetic field*, *Prog. Theor. Phys.* **86**, 1289 (1991).

[DT] G. Dunne and C. Trugenberger, *Self-duality and nonrelativistic Maxwell-Chern-Simons solitons*, *Phys. Rev.* **D 43**, 1323 (1991).

[KL] K. Lee, *Vortex dynamics in self-dual Maxwell-Higgs systems with a uniform background electric charge density*, *Phys. Rev.* **D 49**, 4265 (1994); K. Lee and P. Yi, *Self-dual anyons in uniform background fields*, *Phys. Rev.* **D 52**, 2412 (1995).

[DHP2] C. Duval, P. A. Horváthy and L. Palla, *Conformal symmetry of the coupled Chern-Simons and gauged nonlinear Schrödinger equations*, *Phys. Lett.* **B 325**, 39 (1994); "Conformal properties of Chern-Simons vortices in external fields," Phys. Rev. D **50** (1994) 6658 [hep-th/9404047, hep-th/9405229].